

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA FORMULACAO MISTA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A
ANALISE ELASTOPLASTICA DE ESTRUTURAS RETICULARES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

POLIANA DIAS DE MORAES

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1993.

UMA FORMULAÇÃO MISTA DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS RETICULARES

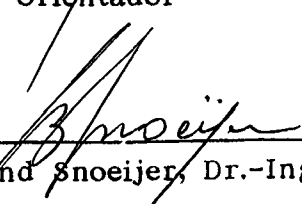
POLIANA DIAS DE MORAES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO,
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Carlos A. C. Selke, Ph.D.
Orientador

Prof. Berend Snoeijer, Dr.-Ing.
Coord. da Pós-graduação em Eng. Mecânica

Banca Examinadora:



Prof. Carlos A. C. Selke, Ph.D.

Prof. Arno Blass, Ph.D.

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.

Prof. Luiz Teixeira do V. Pereira, M.Sc.

A Rolf
A meus pais

AGRADECIMENTOS

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Professor Carlos Alberto de Campos Selke pela orientação deste trabalho.

Ao Professor Arno Blass pelo auxílio prestado.

A Rolf Bertrand Schroeter pelo apoio constante.

Ao mestrando Jucélio Tomás Pereira, pelos conselhos, pela amizade e incentivo.

Aos colegas de curso e professores do Departamento de Engenharia Mecânica.

À Secretária Vera Lúcia.

À BRAMETAL - Brandão Metalúrgica Ltda.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

INDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Revisão bibliográfica	3
2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA-COLUNA PARA ESTRUTURAS RETICULARES	10
2.1. Introdução	10
2.2. Relações cinemáticas	11
2.3. Deslocamentos e deformações do elemento	16
2.4. Obtenção da forma fraca de compatibilidade e equilíbrio	18
2.4.1. Princípio de Reissner	18
2.4.2. Equações de equilíbrio	19
2.4.3. Equações de compatibilidade	20
2.4.4. Equilíbrio do nó	22
2.4.5. Formas fracas de compatibilidade e equilíbrio combinadas	23
2.5. Matriz de rigidez tangente elástica	24
3. PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO PARA ESTRUTURAS RETICULARES	29
3.1. Introdução	29
3.2. Conceitos básicos	30
3.2.1. Condição de escoamento	30
3.2.2. Função potencial plástico	31
3.2.3. Regra associada de escoamento	32
3.3. Método dos nós plásticos	33
3.4. Matriz de rigidez elastoplástica	33
3.5. Escolha do critério de escoamento	36
3.6. Controle do deslocamento do ponto das forças generalizadas sobre a superfície de escoamento	39

4. SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELÁSTICOS E ELASTOPLÁSTICOS DE ESTRUTURAS RETICULARES PLANAS E ESPACIAIS	43
4.1. Introdução	43
4.2. Análise elástica	44
4.2.1. Viga em balanço	44
4.2.2. Viga biengastada de Weeks	48
4.2.3. Estrutura tipo junta de Williams	51
4.2.4. Domo hexagonal	54
4.2.5. Domo	56
4.3. Análise elastoplástica	58
4.3.1. Pórtico plano de dois andares	58
4.3.2. Pórtico plano simples	61
 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DESTE TRABALHO	 64
5.1. Conclusões	64
5.2. Sugestões para continuidade deste trabalho	65
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 67
 BIBLIOGRAFIA AUXILIAR	 72
 APÊNDICE A	 75
 APÊNDICE B	 76
 APÊNDICE C	 87

SIMBOLOGIA

e, X_i		Sistema de coordenadas globais
e', X'_i		Sistema de coordenadas de um elemento indeformado
\hat{e}, \hat{X}_i		Sistema de coordenadas de um elemento deformado
ℓ	m	Comprimento de um elemento indeformado
L	m	Comprimento de um elemento deformado
H	m	Variação do comprimento do elemento
u	m	Deslocamento nodal no sistema de referência X
u'	m	Deslocamento nodal no sistema de referência X'
u^*	m	Deslocamento nodal no sistema de referência \hat{X}
θ	rad	Rotação nodal no sistema de referência X
θ'	rad	Rotação nodal no sistema de referência X'
θ^*	rad	Rotação nodal no sistema de referência \hat{X}
$[CA_0]$		Matriz de transformação de e' para e
$[CA]$		Matriz de transformação de \hat{e} para e
ϵ	m	Deformação axial na direção e_1
κ		Curvatura do elemento
$\{d\}$		Vetor dos deslocamentos nodais no sistema de referência global
$\{\Delta d\}$		Incremento do vetor $\{d\}$
$\{\delta d\}$		Variação do vetor $\{d\}$
$\{D\}$		Vetor deslocamento do elemento no sistema e^*
N	N	Força axial do elemento
M_i	N	Momentos do elemento no sistema e
Q_i	N	Forças cisalhantes
q_c	N	Carregamento distribuído conservativo
q_n	N	Carregamento distribuído não conservativo
W_c		Função densidade de energia complementar
$\{\sigma\}$		Vetor de força nodal do elemento no sistema e^*
$\{\Delta \sigma\}$		Incremento de $\{\sigma\}$
$\{\delta \sigma\}$		Variação de $\{\sigma\}$

[F]		Matriz de interpolação para N e M _i
E	N/m ²	Módulo de Young
G	N/m ²	Módulo de elasticidade transversal
I	m ⁴	Momento de inércia
A	m ²	Área da seção transversal
f(σ)		Função de escoamento
g(σ)		Função potencial plástico
H _p	m	Elongação plástica
θ _p [*]	rad	Rotação plástica
ΔH _p	m	Incremento da elongação plástica
Δθ _p [*]	rad	Incremento da rotação plástica
λ		Parâmetro de elongação plástica
[K]		Matriz de rigidez tangente do elemento
[K̂]		Matriz de rigidez tangente elastoplástica do elemento
{R}		Vetor força nodal interna do elemento
k	N/m ²	Valor crítico de escoamento
τ	N/m ²	Tensão cisalhante
τ _o	N/m ²	Tensão cisalhante de escoamento
σ	N/m ²	Tensão normal
σ _o	N/m ²	Tensão normal de escoamento
p		Força normal normalizada
m ₂ , m ₃		Momentos fletores normalizados
t		Momento torcional normalizado
Σ		Somatório
[]		Matriz
{ }		Vetor

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma formulação do tipo incremental-iterativa para análise não-linear geométrica e material de estruturas reticulares espaciais, baseada no Princípio da Energia Complementar. Supõe-se que o material seja homogêneo e elástico-perfeitamente plástico, que as seções transversais das vigas-colunas sejam duplamente simétricas e constantes ao longo do comprimento e que as rotações relativas sejam pequenas.

A matriz de rigidez tangente é deduzida explicitamente a partir de um princípio variacional misto-híbrido, sem empregar integração numérica ou funções de interpolação de deslocamentos. A simulação do comportamento elastoplástico é efetuada através de modificações introduzidas na matriz de rigidez tangente pelo método dos nós plásticos, no qual a plastificação é localizada nos nós dos elementos, obedecendo a critérios de plastificação generalizados.

A fim de testar a eficiência deste método, são resolvidos numericamente alguns exemplos elásticos e elastoplásticos, sendo seus resultados comparados com os publicados na literatura.

ABSTRACT

An incremental-iterative formulation for the material and geometrical non-linear analysis of spatial framed structures, based on the complementary energy principle, is presented in this work.

It is supposed that the material is homogeneous and elastic-perfectly plastic, that the cross-sections of the beam-column are double symmetrical and constant throughout the length and that the relative rotation be small.

The tangent stiffness matrix is deduced explicitly from a mixed-hybrid variational principle, using neither numerical integration nor displacement interpolation functions. The simulation of the elastoplastic behavior is done through modifications introduced in the tangent stiffness matrix by the plastic node method, in which the plastification is located in the node of the elements, according to generalized plastification criteria.

In order to test the efficiency of this method, a few elastic and elastoplastic examples are solved numerically and the results are compared with those found in the literature.

INTRODUCAO

A tendência de se utilizar estruturas cada vez mais esbeltas e mais leves, com grandes vãos livres, tais como em plataformas marítimas, antenas, torres de transmissão e telhados industriais, além da necessidade de um melhor aproveitamento do desempenho mecânico dos materiais, tem levado à busca de modelos que permitam uma descrição mais realista do comportamento de tais estruturas. Estas exigências técnicas e econômicas também impulsionaram os trabalhos na área de análise não-linear, visto que os efeitos introduzidos pelas mudanças de configuração geométrica e material causadas pelos grandes deslocamentos, bem como o uso de faixas de solicitação acima de certos limites, não permitem a utilização de relações lineares entre tensões e deformações.

Os problemas estudados por engenheiros de projeto, utilizando modelos diversificados, resultam em sistemas de equações diferenciais, para cujas resoluções existem vários métodos. Verifica-se que o método de elementos finitos tem sido um dos mais utilizados para resolver estes problemas. Uma grande parte destes se insere no campo das pequenas deformações e pequenos deslocamentos, resultando em uma análise linear, comumente baseada em métodos de deslocamento. Contudo, as exigências atuais justificam a

utilização da análise não-linear, a qual envolve grandes deformações.

O procedimento para analisar estruturas utilizando o método de elementos finitos é o uso de diversos elementos, discretizando a estrutura e interpolando cada componente de deslocamento em função dos deslocamentos nodais de cada elemento, utilizando funções polinomiais. Cada termo da matriz de rigidez é normalmente calculado através de integração numérica.

Neste trabalho, é apresentada uma análise não-linear geométrica e material de estruturas reticulares espaciais baseada no Princípio de Energia Complementar, considerando o acoplamento flexão-membrana. O método permite que cada membro da estrutura seja modelado por um único elemento, levando deste modo a uma solução mais econômica do que aquela que utiliza o método de elementos finitos usual, evitando-se o grande esforço computacional para a montagem das várias matrizes de rigidez. A relação entre as forças generalizadas e os deslocamentos nodais é efetuada utilizando-se a matriz de rigidez tangente, deduzida explicitamente a partir de um princípio variacional misto-híbrido, sem empregar integração numérica ou funções de interpolação de deslocamentos.

A matriz de rigidez tangente é modificada, a fim de introduzir o comportamento elastoplástico nos elementos de viga-coluna. A simulação deste comportamento é feita através do método dos nós plásticos, proposto por Ueda [1], no qual a plastificação é localizada nos nós dos elementos e obedece a um critério de plastificação específico.

Na formulação do presente método, supõe-se que o material empregado seja homogêneo e elástico-perfeitamente plástico, que as seções transversais das vigas-colunas sejam duplamente simétricas e constantes ao longo do comprimento, que as rotações relativas sejam pequenas e que os carregamentos externos sejam aplicados nos nós.

O problema elastoestático para estruturas reticulares é formulado no capítulo 2, onde são deduzidas as equações de equilíbrio e de compatibilidade para obtenção da forma fraca combinada das equações que formam a base desta formulação de elementos finitos e, conseqüentemente, a matriz de rigidez tangente elástica.

No capítulo 3, são apresentados alguns conceitos básicos de plasticidade e é formulado o problema elastoplástico, determinando-se a matriz de rigidez elastoplástica. Algumas funções de escoamento para vigas de seção transversal retangular são discutidas.

No capítulo 4, são resolvidos vários exemplos numéricos elásticos e elastoplásticos, sendo os seus resultados comparados com os publicados na literatura, a fim de testar a eficiência do método proposto.

Por último, no capítulo 5, são apresentadas algumas conclusões e propostos estudos para a continuidade deste trabalho.

1.1. REVISÃO BIBLIOGRAFICA

As estruturas reticulares são largamente usadas em aplicações de engenharia, principalmente em Engenharia Civil. Algumas destas estruturas estão sujeitas a carregamentos que produzem grandes deformações plásticas. Contudo, o projeto clássico de tais estruturas é baseado nos conceitos de elasticidade linear, que se fundamentam nas hipóteses de que os deslocamentos e deformações são muito pequenos em relação às dimensões do corpo analisado e que as tensões são diretamente proporcionais às deformações.

As simplificações decorrentes destas hipóteses, introduzidas nas equações da mecânica do contínuo, levam a um sistema de equações aplicável à grande maioria dos problemas de Engenharia. Entretanto, o uso dessas simplificações na resolução de problemas nos quais devem ser considerados não-linearidade geométrica, comportamento elástico não-linear, comportamento elastoplástico, comportamento viscoelástico ou viscoplástico, ou combinações de condições anteriores [2], levam a resultados incorretos.

Os problemas com não-linearidade podem ser classificados em:

1. não-linearidade material somente, onde os deslocamentos e deformações são pequenos, porém a relação tensão-deformação é não-linear;
2. grandes deslocamentos e grandes rotações, mas pequenas deformações, sendo que os deslocamentos e rotações das fibras dos elementos são grandes, mas as distensões e a variação dos ângulos entre fibras são pequenas, podendo a relação tensão-deformação ser linear ou não;
3. grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações, onde se têm grandes distensões e variação de ângulo entre fibras, grandes deslocamentos e rotações, podendo também a relação tensão-deformação vir a ser linear ou não [2].

A fim de resolver alguns destes problemas com não-linearidades geométrica e material na análise de estruturas reticulares, foram desenvolvidos vários trabalhos sobre o método de elementos finitos, baseados em formulações que utilizam o método de deslocamentos e descrições lagrangeanas. Entre eles estão os métodos propostos por Argyris et al. [3, 4] e Wong e Tin-Loi [5].

Argyris et al. [3] apresentaram uma formulação para a análise

elastoplástica de estruturas submetidas a grandes deformações, utilizando o método de elementos finitos. Uma análise incremental é utilizada para modelar o comportamento não-linear destas estruturas. É utilizada a assim chamada formulação natural. A formulação permite a utilização de funções de escoamento aplicadas a diferentes condições de carregamento e diferentes geometrias. As interpolações dos deslocamentos ao longo do elemento são realizadas empregando-se funções polinomiais cúbicas para deslocamentos transversais e funções polinomiais lineares para interpolar o deslocamento axial. São mantidos alguns termos não-lineares das relações deformação-deslocamento. Este tipo de formulação exige diversos elementos para mais bem modelar cada membro da estrutura; além disso a matriz de rigidez tem de ser calculada numericamente diversas vezes durante a análise.

Argyris et al. [4] apresentaram uma nova formulação baseada nas chamadas rotações semitangenciais, que permite uma relação única de deformação-deslocamento para problemas de grandes deslocamentos envolvendo rotações em torno de eixos ortogonais, levando diretamente à simetria da matriz de rigidez para sistemas conservativos. Ao contrário das rotações em torno de eixos fixos, as rotações semitangenciais possuem a propriedade de serem comutativas. Deste modo, é feita uma explanação detalhada sobre rotações e torques semitangenciais e métodos para geração de momentos. Como consequência das definições de momentos e rotações semitangenciais, é deduzida, de maneira simples e consistente, uma matriz de rigidez geométrica simétrica de elementos finitos, a qual expressa claramente as relações não-lineares entre deformação e deslocamento, preservando o caráter conservativo do carregamento da estrutura como um todo, independentemente do carregamento.

Wong e Tin-Loi [5] apresentaram um método para a análise elástica não-linear, enfatizando o emprego de uma descrição lagrangeana atualizada e ressaltando o uso de uma estratégia de solução baseada no processo iterativo de Newton-Raphson modificado, aliado ao método de comprimento de arco.

A necessidade de se usar vários elementos na modelagem da estrutura, na busca de uma solução mais precisa, que redundava na repetitividade do cálculo numérico da matriz de rigidez de cada elemento, levou a uma busca de novas metodologias, nas quais se procura obter formas explícitas para a matriz de rigidez.

Kondoh e Atluri [6] apresentaram uma metodologia simplificada, econômica e de grande precisão para a análise pós-flambagem de estruturas

reticulares planas submetidas a grandes deformações, utilizando o método dos deslocamentos. A formulação apresentada utiliza o conceito de decomposição polar da deformação na obtenção da matriz de rigidez tangente explícita de um elemento da estrutura, levando em consideração o acoplamento não-linear membrana-flexão em qualquer ponto do diagrama carga-deformação. Na obtenção da matriz de rigidez tangente, utiliza-se a solução exata da equação de deslocamento para cada elemento viga-coluna, considerando-se a ocorrência de grandes rotações.

Kondoh et al. [7] estenderam esta abordagem para estruturas espaciais. Utilizando um elemento de viga para modelar cada membro da estrutura, foram apresentados procedimentos simplificados para a análise de estruturas reticulares submetidas a grandes deformações. Cada elemento pode sofrer a ação de movimentos rígidos tridimensionais, arbitrariamente grandes, bem como de rotações não-rígidas moderadamente grandes. Cada elemento tem atuando sobre si três momentos e três forças. Na formulação, é considerado o acoplamento não-linear entre membrana e flexão em cada elemento. A expressão explícita da matriz de rigidez tangente de cada elemento é novamente obtida, utilizando-se as soluções exatas das equações diferenciais que governam o problema, sendo válida para qualquer etapa do processo de deformação. Na resolução do sistema de equações que representa o problema é utilizado um método de comprimento de arco [44-46]. A ocorrência de deformação plástica é simulada através da introdução de rótulas plásticas.

Anteriormente, Chu e Rampetsreiter [8] apresentaram outra metodologia para análise de instabilidade de estruturas espaciais, onde era considerado o acoplamento do efeito de torção. A matriz de rigidez também era deduzida a partir da resolução das equações de Euler.

Também Meek e Loganatan [9, 10] e Meek e Tan [11] desenvolveram trabalhos de análise de estruturas reticulares espaciais através da obtenção de uma forma explícita para a matriz de rigidez tangente do elemento, empregando uma formulação lagrangeana atualizada, que separa as deformações puras do elemento dos deslocamentos nodais, juntamente com uma matriz de orientação nodal que auxilia na atualização das rotações nodais.

Recentemente, Al-Bermani e Kitipornchai [12] analisaram estruturas espaciais, considerando o acoplamento entre as deformações axial, transversal e torcional em viga com seção transversal assimétrica de parede fina. A formulação permite o emprego de somente um elemento na modelagem dos membros, embora a forma da matriz de rigidez não seja explícita.

As abordagens utilizando o método dos deslocamentos, anteriormente

mencionadas, não consideravam os efeitos de deformação plástica, enquanto os trabalhos de Hofmeister et al. [13] e Zienkiewicz et al. [14] fazem tal consideração, utilizando o método de elementos finitos.

Hofmeister et al. [13] apresentaram uma metodologia para análise elastoplástica de estruturas bidimensionais, sujeitas a grandes deformações, utilizando o método de elementos finitos de deslocamento. Um princípio variacional, na forma incremental, é utilizado para se obter as equações de equilíbrio de elementos finitos usadas na solução linearizada por incremento. A formulação apresentava a novidade, para a época, de que o princípio variacional levava a um conjunto de equações que automaticamente incluíam a verificação de equilíbrio. A verificação de equilíbrio pode ser utilizada em qualquer ponto do processo incremental, através de uma iteração dentro do método de Newton-Raphson, reduzindo os erros acumulados em cada nó. Estes erros são causados pelo processo de linearização das equações do problema dentro do incremento e podem crescer a tal ponto que os valores calculados de deslocamentos podem não ter significado físico. A verificação de equilíbrio e o procedimento corretivo objetivam evitar que a relação carga-deslocamento calculada não se desvie demasiadamente da trajetória real.

Zienkiewicz et al. [14] apresentaram uma formulação geral para matriz de rigidez elastoplástica aplicável a elementos finitos, capaz de modelar problemas de plasticidade perfeita e encruamento, descrevendo deslocamentos e deformações em vários estágios de carregamento, desenvolvimento de zonas plásticas e previsão da distribuição das deformações residuais, quando da remoção do carregamento. Introduz-se o então chamado "método de tensão inicial", no qual a matriz elástica básica permanece inalterada durante o processo incremental, tanto na fase de carregamento como de descarregamento da estrutura.

Kondoh e Atluri [15] apresentaram uma formulação alternativa para análise elastoplástica de estruturas reticulares planas, que podem ser modeladas através do uso de elementos finitos de viga. A formulação é baseada no Princípio da Mínima Energia Complementar, utilizando uma abordagem em que é adotado um campo de tensões, derivando-se a matriz de rigidez tangente do elemento de viga, sujeito a carregamentos do tipo não-conservativo. O elemento de viga é submetido a grandes rotações de corpo rígido, mas a pequenos deslocamentos axiais e pequenas rotações relativas. Demonstra-se que o método das rótulas plásticas (em que é permitida a formação de rótulas plásticas em um ponto arbitrário, ao longo da viga) permite que a matriz de rigidez tangente seja deduzida

explicitamente, sem necessidade de integração numérica. Também neste caso, cada membro de estrutura reticular pode ser modelado por apenas um elemento de viga. Para alguns problemas de análise elastoplástica, esta metodologia pode ser uma alternativa mais simples que o método dos elementos finitos de deslocamentos.

Shi e Atluri [16-18] estenderam o trabalho de Kondoh e Atluri [15] para a análise estática e dinâmica de estruturas reticulares espaciais submetidas a grandes deformações elastoplásticas. Novamente, a análise é baseada no Princípio da Minimização de Energia Complementar. A metodologia apresentada prevê que cada membro da estrutura reticular possa ser modelado por um único elemento de viga-coluna espacial; que cada membro da estrutura reticular possa ser submetido a rotações de corpo rígido arbitrariamente grandes, mas a rotações relativas apenas moderadamente grandes; que os efeitos plásticos sejam considerados através do método das rótulas plásticas, localizadas em pontos arbitrários da viga; que cada membro introduz o acoplamento membrana e flexão não-linear; que os carregamentos aplicados podem ser não-conservativos; e que a matriz de rigidez tangente de cada elemento pode ser obtida de forma explícita. Na formulação é utilizada a forma fraca das condições de compatibilidade para o elemento.

Shi [19], continuando o trabalho de Shi e Atluri [16-18] para a análise estática e dinâmica de estruturas reticulares espaciais submetidas a grandes deformações elastoplásticas, analisa: os efeitos da não-linearidade geométrica causados por grandes deformações; a não-linearidade material, resultante das deformações plásticas; a não-linearidade estrutural, resultante das conexões flexíveis; a não-linearidade de amortecimento nos nós da estrutura, resultante das deformações plásticas, conexões flexíveis não-lineares e escorregamento inerentes ao mecanismo de atrito. A metodologia apresentada prevê, como a de Shi e Atluri [16-18], que cada membro da estrutura possa ser modelado por um único elemento de viga-coluna; que cada membro da estrutura possa ser submetido a grandes deformações elastoplásticas, que sejam decompostas em rotações de corpo rígido arbitrariamente grandes e deformações axiais e rotações relativas moderadas; que os carregamentos possam ser não-conservativos, e que as estruturas de aço possam ter conexões rígidas ou conexões flexíveis não-lineares; que os efeitos plásticos são considerados através do método das rótulas plásticas localizadas em pontos arbitrários da viga; que as conexões flexíveis não-lineares sejam representadas através de molas não-lineares e o elemento de viga, juntamente com as molas, seja tratado

como um único elemento. O escorregamento de translação e rotação nos nós é representado pelo modelo de nó do tipo Coulomb. As vibrações não-lineares são controladas através da distribuição de atuadores piezelétricos colados nas superfícies dos membros, sendo que a modelagem considera as tensões de cisalhamento provocadas pelos atuadores piezelétricos quando a estrutura é carregada, provocando o estímulo dos mesmos.

Esta metodologia também foi seguida por Haldar e Nee [20] na análise de estruturas com conexões nodais parcialmente restringidas em estado limite último.

Carol e Murcia [21, 22], na análise de estruturas reticulares planas de concreto, empregaram uma formulação híbrida semelhante, que também permite a dedução explícita da matriz de rigidez tangente, considerando o comportamento geométrico não-linear e fluência.

Remseth [23] apresentou uma formulação para uma análise não-linear estática e dinâmica de estruturas reticulares espaciais, detendo-se na avaliação do espectro total de deformação, cobrindo os possíveis modos de instabilidade e comportamento pós-flambagem. Esta formulação de elementos finitos é baseada no método dos deslocamentos, adotando uma descrição lagrangeana do movimento. As equações incrementais e de equilíbrio estático foram deduzidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais e Princípio da Energia Potencial Estacionária. As equações dinâmicas de equilíbrio foram deduzidas através da combinação do Princípio de d'Alembert com o Princípio dos Trabalhos Virtuais, supondo o material hiperelástico. As deflexões iniciais, nas relações de rigidez de elemento, foram introduzidas através de um elemento curvo de viga, sendo empregadas funções polinomiais de alta ordem para interpolação axial, a fim de obter adequadamente o acoplamento flexão-membrana, apresentando-se um método na transformação para coordenadas generalizadas com base modal para integração de equações incrementais de movimento e estudado como uma alternativa à integração direta. No trabalho foram avaliados métodos de solução numérica não-linear, alguns aplicáveis à análise dinâmica, além de ser discutida a eficiência destes métodos juntamente com os resultados dinâmicos não-lineares.

Trabalhos como os de Wong e Tin-loi [24, 25], Orbison et al. [26] e Bruinette e Fenves [27], além de apresentarem formulações para análise elastoplástica, discutem detalhadamente vários tipos de funções de escoamento.

Morris e Fenves [28] apresentaram uma metodologia para o cálculo de fatores de carga para aplicação em análise elastoplástica, apresentando

ainda equações de funções de escoamento aplicáveis a vários tipos de seções transversais de viga.

Neste trabalho é empregada a formulação proposta por Shi [19].

FORMULACAO DO ELEMENTO DE VIGA-COLUNA PARA ESTRUTURAS RETICULARES

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são deduzidas as equações de equilíbrio e de compatibilidade para obtenção da forma fraca e, conseqüentemente, a matriz de rigidez tangente do problema elástico para estruturas reticulares.

Inicialmente, caracteriza-se o elemento através de sua geometria, graus de liberdade e forças nodais, obtendo-se as relações entre deslocamentos e deformações do elemento, tecendo-se considerações sobre ele.

Utilizando-se o Princípio de Reissner, deduzem-se as equações de equilíbrio e de compatibilidade, em termos de forças generalizadas, a fim de se obter a forma fraca combinada do problema.

De posse da forma fraca, obtém-se um funcional misto-híbrido, baseado em campos de tensões, que é empregado na dedução da matriz de rigidez tangente.

2.2. RELAÇÕES CINEMÁTICAS

A figura 2.1 mostra um elemento de viga com extremidades identificadas pelos números 1 e 2 nas configurações deformada e indeformada, associadas aos sistemas de coordenadas X'_i para a configuração indeformada e \hat{X}_i para a configuração deformada do elemento.

A orientação dos referidos sistemas é efetuada com relação a um sistema de referência fixo definido pelo sistema de coordenadas globais X_i .

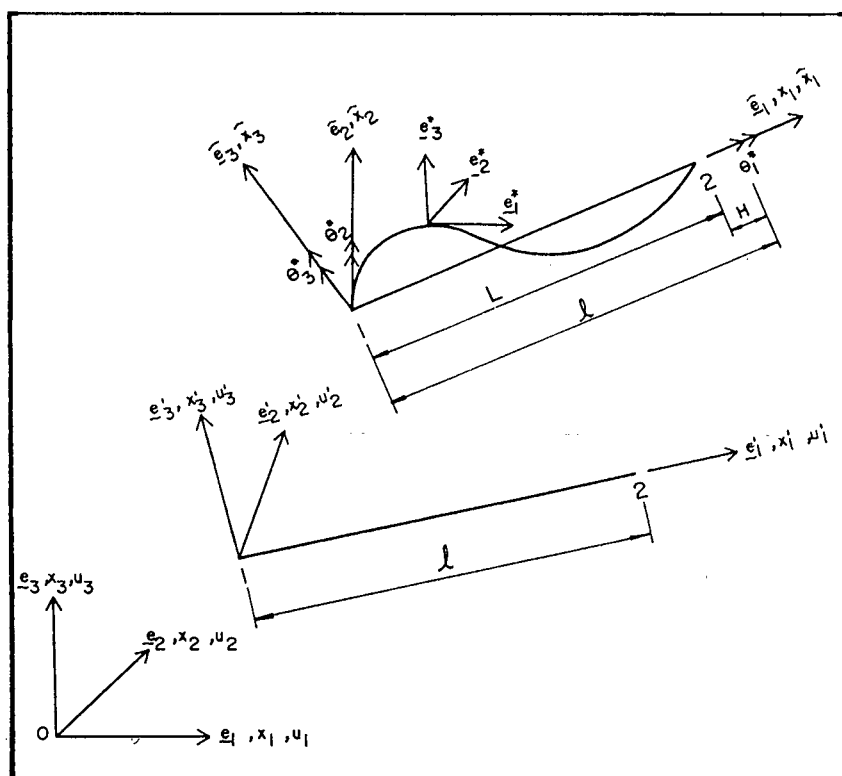


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas e graus de liberdade do elemento

Na presente análise, o eixo x'_1 é tomado na direção que une os dois centróides da seção 1 e 2, o eixo x'_2 é perpendicular ao plano que contém os eixos x'_1 e x_1 , e o eixo x'_3 é perpendicular ao plano $x'_1x'_2$. Consequentemente, os vetores da base local indeformada e'_i são determinados do mesmo modo que seus respectivos eixos, como segue

$$e'_1 = \left(DX_1 e_1 + DX_2 e_2 + DX_3 e_3 \right) / l, \quad (2.1)$$

$$e'_2 = \left(e_3 \times e'_1 \right) / |e_3 \times e'_1|, \quad (2.2)$$

$$e'_3 = e'_1 \times e'_2, \quad (2.3)$$

onde

$$DX_i = {}^2X_i - {}^1X_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

sendo ${}^\alpha X_i$ as coordenadas globais do nó α do membro. Como

$$\ell = \left\{ (DX_1)^2 + (DX_2)^2 + (DX_3)^2 \right\}^{1/2} e \quad (2.5a)$$

$$\phi = \left\{ (\hat{DX}_1)^2 + (\hat{DX}_2)^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.5b)$$

consequentemente, a relação entre os dois sistemas de coordenadas local indeformado e global é dada por

$$\begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{bmatrix}^T = [CA_0] \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T, \quad (2.6)$$

onde

$$[CA_0] = \begin{bmatrix} \frac{DX_1}{\ell} & \frac{DX_2}{\ell} & \frac{DX_3}{\ell} \\ \frac{DX_2}{\phi} & \frac{DX_1}{\phi} & 0 \\ -\frac{DX_1}{\ell} \frac{DX_3}{\phi} & \frac{DX_2}{\ell} \frac{DX_3}{\phi} & \frac{\phi}{\ell} \end{bmatrix}.$$

A relação entre os vetores dos sistemas global e_i e do local deformado \hat{e}_i pode ser determinada, sabendo-se que

$$\bar{u}_i = {}^2u_i - {}^1u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

$$\hat{DX}_i = DX_i + \bar{u}_i, \quad (2.8)$$

$$L = \left\{ (\hat{DX}_1)^2 + (\hat{DX}_2)^2 + (\hat{DX}_3)^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.9)$$

$$S = \left\{ (\hat{DX}_1)^2 + (\hat{DX}_2)^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.10)$$

sendo \bar{u}_i o deslocamento relativo entre as extremidades do elemento de viga em relação às coordenadas globais. Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \end{bmatrix}^T = [CA] \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T, \quad (2.11)$$

onde

$$[CA] = \begin{bmatrix} \frac{\hat{DX}_1}{L} & \frac{\hat{DX}_2}{L} & \frac{\hat{DX}_3}{L} \\ \frac{\hat{DX}_2}{S} & \frac{\hat{DX}_1}{S} & 0 \\ -\frac{\hat{DX}_1}{L} \frac{\hat{DX}_3}{S} & \frac{\hat{DX}_2}{L} \frac{\hat{DX}_3}{S} & \frac{S}{L} \end{bmatrix}.$$

Pode-se expressar a matriz transformação de maneira alternativa. Admitindo que as rotações relativas θ_i^* sejam muito pequenas, a variação do comprimento do elemento de viga será dada por:

$$H = \left\{ (\hat{DX}_1)^2 + (\hat{DX}_2)^2 + (\hat{DX}_3)^2 \right\}^{1/2} - l, \text{ e} \quad (2.12)$$

derivando em relação a \bar{u}_i obtém-se a matriz [CA]

$$[CA] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_2} & \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \\ -\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} & \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} & 0 \\ -\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} & \frac{S}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Mas quando o eixo x'_1 é paralelo a x_3 , ou seja, DX_1 e DX_2 são nulos, as expressões acima não são mais válidas, visto que $s = 0$. Neste caso adota-se [CA0] como sendo

$$[CA_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para se obter a matriz $[CA]$, supõe-se que o eixo \hat{x}_1 seja tomado na direção que une os dois centróides da seção 1 e 2, o eixo \hat{x}_2 esteja contido no plano x'_2x_1 e o eixo \hat{x}_3 seja perpendicular ao plano \hat{x}_1x_2 . Consequentemente, os vetores da base local deformada \hat{e}_i tomam a seguinte forma:

$$\hat{e}_1 = \frac{DX_1}{L} e_1 + \frac{DX_2}{L} e_2 + \frac{DX_3}{L} e_3,$$

$$\hat{e}_2 = -\frac{D\hat{X}_2}{L} \frac{D\hat{X}_1}{L} e_1 + \frac{S'}{L} e_2 - \frac{D\hat{X}_2}{L} \frac{D\hat{X}_3}{S'} e_3$$

$$\hat{e}_3 = -\left[\frac{D\hat{X}_3}{S'} \left(\frac{D\hat{X}_2}{L} \right)^2 + \frac{D\hat{X}_3}{L} \frac{S'}{L} \right] e_1 +$$

$$\left(-\frac{D\hat{X}_3}{L} \frac{D\hat{X}_2}{L} \frac{D\hat{X}_1}{S'} + \frac{D\hat{X}_1}{L} \frac{D\hat{X}_2}{L} \frac{D\hat{X}_3}{S'} \right) e_2 + \left(\frac{D\hat{X}_1}{L} \frac{S'}{L} + \left(\frac{D\hat{X}_1}{L} \right)^2 \frac{D\hat{X}_2}{L} \right) e_3,$$

sendo $S' = \left\{ (D\hat{X}_1)^2 + (D\hat{X}_2)^2 \right\}^{1/2}$, que são utilizados na obtenção de $[CA]$.

Empregando as definições dadas anteriormente, os deslocamentos incrementais locais $\Delta^\alpha u^*$ ao longo de \hat{e}_i medidos em relação ao sistema de referência global X_i são expressos como

$$\Delta^\alpha u_j^* = (CA)_{ji} \Delta^\alpha u_i^*,$$

Os incrementos de variação de comprimento são dados por

$$\Delta H = {}^2\Delta u_1^* - {}^1\Delta u_1^* = L - L_0,$$

onde L_0 é o comprimento do elemento na configuração anterior e L é o comprimento no incremento. Analogamente, as rotações relativas incrementais $\Delta^\alpha \theta_i^*$ em torno dos eixos \hat{e}_i do nó α são expressas por:

$$\Delta^\alpha \theta_1^* = (CA)_{ij} \Delta^\alpha \theta_j^*, \quad (2.16)$$

$$\Delta^\alpha \theta_2^* = (CA)_{ij} \Delta^\alpha \theta_j^* + \arctg \left[\frac{\bar{\nu}_3}{\ell + \bar{\nu}_1} \right], \quad (2.17)$$

$$\alpha_{\Delta\theta_3}^* = (CA)_{ij} \alpha_{\Delta\theta_j} - \arctg \left[\frac{\bar{v}_2}{\ell + \bar{v}_1} \right], \quad (2.18)$$

onde $\bar{v}_i = {}^2\Delta u_1^* - {}^1\Delta u_1^*$, para $\alpha = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$, e $(CA)_{ij}$ são os elementos da matriz [CA] [19].

Conseqüentemente, as rotações relativas totais são dadas pelo somatório das rotações incrementais:

$$\alpha_{\theta_i}^* = \sum \alpha_{\Delta\theta_i}^* \quad i = 1, 2, 3.$$

Como pode ser visto na figura 2.1, o elemento empregado no presente trabalho possui seis graus de liberdade por nó. No sistema local de coordenadas, os deslocamentos transversais do elemento são dados por α_{u_1}' e α_{u_3}' , o deslocamento axial por α_{u_2}' , e as três rotações por $\alpha_{\theta_1}^*$, $\alpha_{\theta_2}^*$ e $\alpha_{\theta_3}^*$.

Quanto às forças resultantes internas, elas podem ser observadas na figura 2.2, sendo constituídas por esforços cortantes $\alpha_{\hat{Q}_2}$ e $\alpha_{\hat{Q}_3}$ nas direções \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , respectivamente, e esforço normal α_N e momentos torção e fletores $\alpha_{\hat{M}_1}$, $\alpha_{\hat{M}_2}$, $\alpha_{\hat{M}_3}$ [8, 13, 16, 20, 30, 31]. Essas variáveis equivalem, respectivamente, a α_{u_2} , α_{u_3} , α_{u_1} , α_{θ_1} , α_{θ_2} , α_{θ_3} no sistema global de coordenadas.

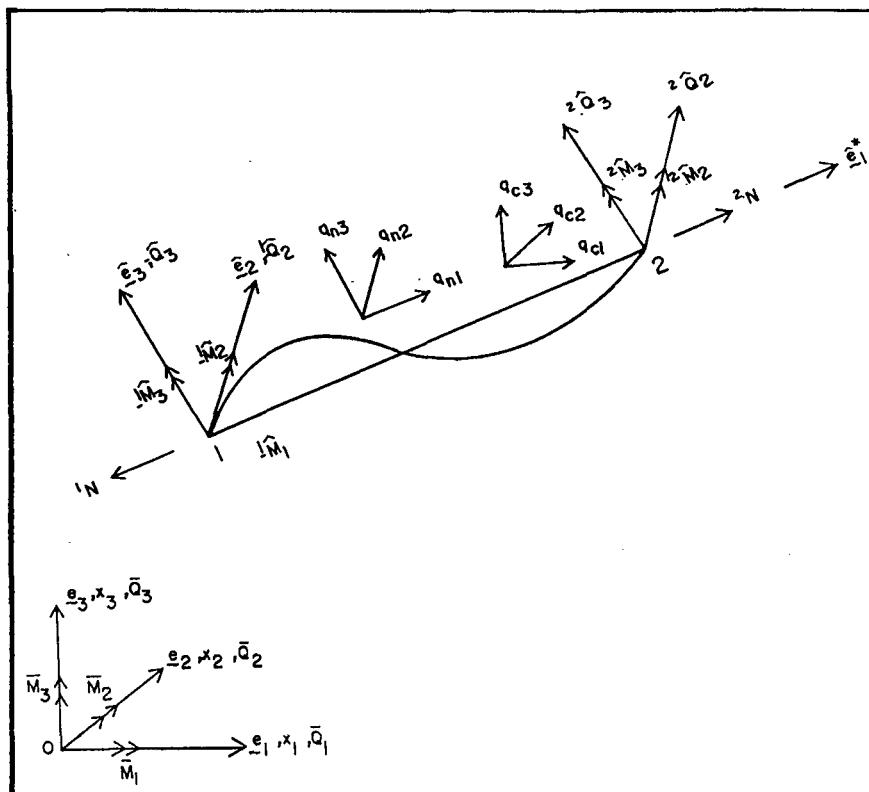


Figura 2.2.: Forças nodais do elemento

No desenvolvimento da formulação, supõe-se que a seção transversal seja constante ao longo do comprimento da viga, sendo duplamente simétrica.

2.3. DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES DO ELEMENTO

Neste trabalho, a fim de se obter um sistema de equações que expresse o comportamento físico da viga, obtêm-se, primeiramente, os movimentos de pontos da viga situados fora da linha neutra, construindo desta forma o campo de deslocamentos. Após, determina-se o vetor campo de deformação, visto que, em um movimento generalizado qualquer, os pontos também sofrem deslocamentos relativos entre si, o que provoca mudança de forma, bem como mudança de posição e orientação do contínuo.

Para obtenção do campo de deslocamentos u ,

$$u = \left\{ U_1(x_1, x_2, x_3) \quad U_2(x_1, x_2, x_3) \quad U_3(x_1, x_2, x_3) \right\}^T, \quad (2.19)$$

consideram-se os efeitos devidos à flexão [31] e à torção, mas ao contrário de [3, 32], despreza-se a contribuição devida ao empenamento, resultando as seguintes componentes para o vetor campo de deslocamentos:

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (2.20)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1) - \beta x_1 x_3 \quad (2.21)$$

e

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1) + \beta x_1 x_2, \quad (2.22)$$

em que $\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$.

Já o campo de deformação, conforme mostrado em [3, 33, 34], pode ser escrito, de um modo geral, como

$$\epsilon = \left\{ \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{31} \right\}^T, \quad (2.23)$$

podendo ser dividido em duas componentes:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_L\} + \{\epsilon_Q\}, \quad (2.24)$$

em que $\{\epsilon_L\}$ contém os termos lineares e $\{\epsilon_Q\}$ contém os termos quadráticos. De acordo com a teoria clássica, suas componentes, para um meio contínuo genérico, são dadas por:

$$\epsilon_{11L} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (2.25a)$$

$$\epsilon_{22L} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad (2.25b)$$

$$\epsilon_{33L} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (2.25c)$$

$$2\epsilon_{23L} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad (2.25d)$$

$$2\epsilon_{31L} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.25e)$$

$$2\epsilon_{12L} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2.25f)$$

e

$$\epsilon_{11Q} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad (2.25g)$$

$$\epsilon_{22Q} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right], \quad (2.25h)$$

$$\epsilon_{33Q} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right], \quad (2.25i)$$

$$2\epsilon_{23Q} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (2.25j)$$

$$2\epsilon_{31Q} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.25k)$$

$$2\epsilon_{12Q} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad (2.25l)$$

definindo, desta forma, os tensores $\{\epsilon_L\}$ e $\{\epsilon_Q\}$ como função do vetor deslocamento.

Considerando-se a hipótese de Euler-Bernoulli para estruturas modeladas por vigas com deslocamentos caracterizados pelas equações 2.20 a

2.22, isto é, assumindo-se que as seções transversais planas e inestensíveis e perpendiculares à linha centroidal indeformada permanecem planas, inestensíveis e perpendiculares à mesma linha após a deformação, observa-se que a expressão (2.23) toma a forma

$$\{\epsilon\} = \left\{ \epsilon_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \right\}^T, \quad (2.26)$$

onde

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (2.27)$$

$$\epsilon_{12} = -\theta_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (2.28)$$

$$\epsilon_{13} = \theta_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}. \quad (2.29)$$

Em conformidade com as referências [7, 11, 15, 18, 19], a deformação axial e as rotações relativas são consideradas pequenas, de tal forma que $h \ll \ell$ e θ^* seja muito pequeno. Conseqüentemente, as componentes de deformação mencionadas acima tornam-se mais simples como serão utilizadas posteriormente.

2.4. OBTENÇÃO DA FORMA FRACA DE COMPATIBILIDADE E EQUILÍBRIO

2.4.1. PRINCÍPIO DE REISSNER

Com o objetivo de se obter uma formulação misto-híbrida similar àquela proposta por Shi e Atluri [16], usa-se o princípio de Reissner [35],

$$\pi_R = \int_V \left[\tau_{ij} \epsilon_{ij} - W_c(\tau_{ij}) \right] dv - \int_V f_i u_i dv - \int_s T_i u_i ds, \quad (2.30)$$

cujos campos de tensões e deslocamentos satisfazem as condições de compatibilidade e equilíbrio, ou seja, a solução real do problema leva o funcional a um valor estacionário e solução única. Desta forma, efetua-se a primeira variação nos campos de tensões e deslocamentos e extremiza-se o funcional a fim de se obter a solução do problema:

$$\delta\pi_R = \int_V \left[\delta\tau_{ij} \epsilon_{ij} + \tau_{ij} \delta\epsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \tau_{ij}} \delta\tau_{ij} \right] dv - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dv - \int_S \bar{T}_i \delta u_i ds = 0.$$

Reagrupando a expressão acima, chega-se a

$$\delta\pi_R = \int_V \left\{ \left[\epsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \tau_{ij}} \right] \delta\tau_{ij} + \tau_{ij} \delta\epsilon_{ij} \right\} dv - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dv - \int_S \bar{T}_i \delta u_i ds = 0, \quad (2.31)$$

dela resultando as equações de compatibilidade e equilíbrio, a partir das quais se obtém a formulação para o problema estudado neste trabalho.

Como em alguns casos em análise estrutural é preferível trabalhar em termos de tensões e deformações resultantes do que diretamente com tensões e deformações usuais, efetua-se a integração das componentes de tensão, a fim de se obter as equações mencionadas acima em função das tensões e deformações generalizadas.

2.4.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Obtêm-se as equações de equilíbrio para o elemento de viga, substituindo as expressões (2.19) a (2.22) na equação (2.31) e desprezando a contribuição de $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2$, que somente se torna relevante quando grandes deformações estiverem presentes [3]. Como $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\theta_2^*$ e $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta_3^*$ e fazendo o desenvolvimento correto, têm-se:

$$\frac{\partial N}{\partial x_1} + \hat{q}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{Q}_2}{\partial x_1} + \hat{q}_2 = 0, \quad (2.32a, b, c)$$

$$\frac{\partial \hat{Q}_3}{\partial x_1} + \hat{q}_3 = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{M}_2}{\partial x_1} - N \theta_2^* - \hat{Q}_3 = 0 \quad (2.33a, b)$$

e

$$\frac{\partial \hat{M}_3}{\partial x_1} - N \theta_3^* + \hat{Q}_2 = 0.$$

As equações obtidas a partir de (2.31) são satisfeitas a priori.

A forma fraca das equações (2.33a e b) pode ser escrita como:

$$- \int_0^1 \left[\frac{\partial \hat{M}_2}{\partial x_1} - N \theta_2^* - \hat{Q}_3 \right] \delta \theta_2^* = 0, \quad (2.34)$$

$$- \int_0^1 \left[\frac{\partial \hat{M}_3}{\partial x_1} - N \theta_3^* + \hat{Q}_2 \right] \delta \theta_3^* = 0, \quad (2.35)$$

sendo estas equações de equilíbrio obtidas para a configuração deformada [34].

Como se está empregando um elemento misto-híbrido baseado em tensões generalizadas, somente as tensões generalizadas serão interpoladas, de acordo com o Apêndice A.

2.4.3. EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Para a obtenção das expressões de compatibilidade, considera-se a existência de uma função Densidade de Energia Complementar W_c como função das forças generalizadas N e \hat{M}_i .

Para materiais linearmente elásticos, quando o eixo de referência do elemento é coincidente com o eixo de simetria da seção, desprezando-se a influência do cisalhamento, a Função Densidade de Energia Complementar toma a forma [19]

$$W_c = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{\hat{M}_1^2}{GI_1} + \frac{\hat{M}_2^2}{EI_2} + \frac{\hat{M}_3^2}{EI_3} \right) \quad (2.36)$$

onde E é o módulo de Young, G é o módulo de elasticidade transversal, I_i é o momento de inércia de uma seção transversal em torno da direção \hat{e}_i e A é a área da seção transversal do elemento.

Supõe-se a relação tensão-deformação como:

$$\frac{\partial W_c}{\partial N} = \ell,$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial M_i} = \ell_i, \quad i=1, 3 \quad (2.37a, b, c)$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial M_2} = -\ell_2,$$

onde ℓ é a deformação na direção \hat{e}_1 e ℓ_i é a curvatura na direção i .

As componentes de deformação de (2.26) não podem ser obtidas arbitrariamente. Elas são determinadas completamente pelas três componentes do vetor deslocamento (2.19) e conseqüentemente as curvaturas ao longo do elemento são definidas como $\ell_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$, $\ell_2 = -\frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}$ e $\ell_3 = \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1}$.

Da expressão (2.31), após serem feitas as integrações necessárias para se obter a expressão em termos de forças generalizadas, destaca-se a condição de compatibilidade, que deve ser respeitada a fim de que o funcional seja extremizado, tomando a forma:

$$\int_S \left[-\frac{\partial W_c}{\partial N} \delta N - \frac{\partial W_c}{\partial M_1} \delta M_1 - \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \delta M_2 - \frac{\partial W_c}{\partial M_3} \delta M_3 + \left(\delta N \frac{\partial u}{\partial x_1} + \delta M_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1^2} + \delta M_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1^3} + \delta M_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) \right] ds. \quad (2.38)$$

Como foi considerado anteriormente, o deslocamento relativo θ_1^* é muito menor que a unidade ($\theta_1^* \ll 1$), logo podem-se desprezar os termos quadráticos de deslocamentos, o que, por sua vez, leva às seguintes expressões de compatibilidade:

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial N} \delta N \, d\hat{x}_1 = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta N \, dx_1 = H \delta N = \left\{ \left[D\hat{x}_1^2 + D\hat{x}_2^2 + D\hat{x}_3^2 \right]^{1/2} - \ell \right\},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_1} \delta M_1 \, d\hat{x}_1 = \int_0^1 \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x_1} \delta M_1 \, d\hat{x}_1 = \left[\theta_1^* \delta M_1 \right]_0^1 = \left({}^2\theta_1^* - {}^1\theta_1^* \right) \delta M_1$$

e

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \delta M_2 \, d\hat{x}_1 = \int_0^1 \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x_1} \delta M_2 \, d\hat{x}_1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\theta_2^* \delta M_2 \right) d\hat{x}_1 - \int_0^1 \theta_2^* \frac{\partial \delta M_2}{\partial x_1} d\hat{x}_1.$$

(2.39a, b, c)

Fazendo a interpolação das forças generalizadas, chega-se a

$$\hat{\delta M}_2 = \delta^1 \hat{M}_2 \left(1 - \frac{\hat{x}}{\ell^1} \right) + \delta^2 M_2 \left(\frac{\hat{x}}{\ell^1} \right),$$

cuja derivada é

$$\frac{\partial \delta M}{\partial x_1} = \frac{\delta^1 M_2 + \delta^2 M_2}{\ell},$$

que é uma constante. Basta, então, integrar $\int_0^1 \theta_2^* dx_1 = 0$. Logo

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \delta M_2 dx_1 = \theta_2^* \delta M_2 \Big|_0^1 = {}^2\theta_2^* \delta^2 M - {}^1\theta_2^* \delta^1 M_2. \quad (2.40)$$

Do mesmo modo, obtém-se

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_3} \delta M_3 dx_1 = \theta_3^* \delta M_3 \Big|_0^1 = {}^2\theta_3^* \delta^2 M_3 - {}^1\theta_3^* \delta^1 M_3. \quad (2.41)$$

2.4.4. EQUILÍBRIO DO NÓ

A estrutura é discretizada, e em cada nó, que é extremidade do elemento, existem forças normais N , cisalhantes \hat{Q}_i ($i = 2, 3$), momentos \hat{M}_j ($j = 1, 2, 3$) e forças externas \bar{F}_i atuantes nas direções e_i e momentos \bar{M}_i atuantes nas direções dos eixos e_i , conforme a figura 2.2.

O vetor $\{NM\}$ denota as forças nodais internas para cada elemento e é constituído por

$$\left\{ \begin{matrix} NM \end{matrix} \right\} = \left\{ {}^1N \ {}^1Q_2 \ {}^1Q_3 \ {}^1M_1 \ {}^1M_2 \ {}^1M_3 \ {}^2N \ {}^2Q_2 \ {}^2Q_3 \ {}^2M_1 \ {}^2M_2 \ {}^2M_3 \right\}^T. \quad (2.42)$$

O vetor $\left\{ \bar{F} \right\}$ representa as forças nodais externas prescritas nos nós 1 e 2:

$$\left\{ \bar{F} \right\} = \left\{ {}^1\bar{F}_1 \ {}^1\bar{F}_2 \ {}^1\bar{F}_3 \ {}^1\bar{M}_1 \ {}^1\bar{M}_2 \ {}^1\bar{M}_3 \ {}^2\bar{F}_1 \ {}^2\bar{F}_2 \ {}^2\bar{F}_3 \ {}^2\bar{M}_1 \ {}^2\bar{M}_2 \ {}^2\bar{M}_3 \right\}^T. \quad (2.43)$$

A condição de equilíbrio para os nós 1 e 2 do elemento pode ser escrita como

$$[CAT] \{NM\} = \{\bar{F}\}, \quad (2.44)$$

onde o somatório se estende sobre as parcelas encontrados em cada nó. No desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento, o vetor $\{\bar{F}\}$ será omitido. Os carregamentos externos são tratados como carregamentos nodais globais assim que os sistemas de matrizes de rigidez e de carregamentos estiverem superpostos.

O vetor deslocamentos nodais de um elemento em relação às coordenadas globais $\{d\}$ é dado por

$$\{d\} = \left\{ {}^1u_1 \quad {}^1u_2 \quad {}^1u_3 \quad {}^1\theta_1 \quad {}^1\theta_2 \quad {}^1\theta_3 \quad {}^2u_1 \quad {}^2u_2 \quad {}^2u_3 \quad {}^2\theta_1 \quad {}^2\theta_2 \quad {}^2\theta_3 \right\}^T \quad (2.45)$$

A forma fraca de equilíbrio sem o vetor $\{\bar{F}\}$ é dada por

$$\sum_{\text{elem}} \{\delta d\}^T [CAT] \{NM\} = 0. \quad (2.46)$$

2.4.5. FORMAS FRACAS DE COMPATIBILIDADE E EQUILÍBRIO COMBINADAS

Somando as partes não-lineares das equações (2.34) e (2.35), às equações (2.39), (2.40) e (2.46), obtém-se a forma fraca combinada:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{elem}} \left\{ - \int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial N} \nu \, d\hat{x}_1 - \int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_1} \mu_1 \, d\hat{x}_1 - \int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \mu_2 \, d\hat{x}_1 - \int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_3} \mu_3 \, d\hat{x}_1 + \right. \\ \left. + \left[\nu H + \left({}^2\theta_1^* - {}^1\theta_1^* \right) \mu_1 + {}^2\theta_2^* \mu_2 - {}^1\theta_2^* \mu_2 + {}^2\theta_2^* \mu_3 - {}^1\theta_2^* \mu_3 \right] + \right. \\ \left. + \delta\{d\}^T [CAT] \{NM\} + \int_0^1 N\theta_2^* \delta\theta_2^* \, dx_1 + \int_0^1 N\theta_3^* \delta\theta_3^* \, dx_1 \right\} = 0, \quad (2.47) \end{aligned}$$

que pode ser reescrita na forma matricial, desprezando-se os termos $\int_0^1 (N\theta_2^* \delta\theta_2^*)$ e $\int_0^1 (N\theta_3^* \delta\theta_3^*)$ [16-19]:

$$\sum_{\text{elem}} \left\{ - \int_0^1 \{W\}^T \{F\} \{\delta\sigma\} dx_1 + \{D\}^T \{\delta\sigma\} + \{\delta d\}^T [CAT] \{NM\} \right\} = 0, \quad (2.48)$$

onde:

$$\{D\} = \left\{ H \begin{pmatrix} {}^2\theta_1^* & -{}^1\theta_1^* & -{}^1\theta_2^* & {}^2\theta_2^* & -{}^1\theta_3^* & {}^2\theta_3^* \end{pmatrix} \right\}^T \quad (2.49)$$

é o vetor deslocamento relativo em relação às coordenadas locais para um elemento deformado,

$$\{\sigma\} = \left\{ n \quad m_1 \quad {}^1m_2 \quad {}^2m_2 \quad {}^1m_3 \quad {}^2m_3 \right\}^T \quad (2.50)$$

representa o vetor das forças internas que satisfazem somente a parte homogênea das equações de equilíbrio [15-16], cuja variação corresponde a

$$\{\delta\sigma\} = \left\{ \nu \quad \mu_1 \quad {}^1\mu_2 \quad {}^2\mu_2 \quad {}^1\mu_3 \quad {}^2\mu_3 \right\}^T, \quad (2.51)$$

$$\{W\} = \left\{ \frac{\partial W_c}{\partial N} \quad \frac{\partial W_c}{\partial M_1} \quad \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \quad \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \right\}^T e \quad (2.52)$$

[F] representa a matriz das funções de interpolação.

2.5. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE ELÁSTICA

Em problemas não-lineares, a matriz de rigidez também é função dos deslocamentos, sendo chamada matriz de rigidez tangente. Ela é empregada para calcular o próximo passo de deslocamento de uma série linear de passos no qual o problema é dividido.

A matriz de rigidez tangente é obtida a partir da expressão (2.48) para uma situação incremental em que os termos formadores da expressão citada são expandidos em Série de Taylor. Conservando-se somente os termos de primeira ordem para o campo de deslocamentos $\{d\}$ e de tensões $\{\sigma\}$, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ \delta \Delta d^T [CAT] \{NM\} + \delta \Delta d^T \Delta [CAT] \{NM\} + \delta \Delta d^T [CAT] \Delta \{NM\} \right. \\ & \left. + \delta \Delta \sigma^T \left([\Delta D] - \int_0^1 [\Delta W]^T [F] dx_1 \right) + \delta \Delta \sigma^T \left(\{D\} - \int_0^1 [W]^T [F] dx_1 \right) \right\} = 0. \quad (2.53) \end{aligned}$$

A partir da expressão acima, obtêm-se as matrizes que entram na formulação da equação de equilíbrio para a forma incremental.

$\Delta [CAT] \{NM\}$ representa um incremento no campo dos deslocamentos $\{d\}$, tomando a forma de

$$\Delta [CAT] \{NM\} = \begin{bmatrix} A_{dd} \end{bmatrix} \{\Delta d\}, \quad (2.54)$$

onde

$$\{\Delta d\} = \left\{ \Delta^1 u_1, \Delta^1 u_2, \Delta^1 u_3, \Delta^1 \theta_1, \Delta^1 \theta_2, \Delta^1 \theta_3, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3, \Delta^2 \theta_1, \Delta^2 \theta_2, \Delta^2 \theta_3 \right\}^T,$$

e $\begin{bmatrix} A_{dd} \end{bmatrix}$ representa a matriz de rigidez geométrica, cujos elementos são mostrados no Apêndice B.

O vetor das forças internas $\{NM\}$ pode ser decomposto em duas partes, uma que corresponde à solução particular da equação diferencial e a outra à solução da homogênea associada:

$$\{NM\} = [T] \{\sigma\} + \{NP\}. \quad (2.55)$$

Considerando o fato da matriz de rigidez tangente ser deduzida em relação às coordenadas globais, faz-se uma transformação de coordenadas na expressão (2.54) através da matriz

$$[CAT] = \begin{bmatrix} -CA & -CA & CA & CA \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

resultando

$$[CAT] \{NM\} = [CAT] [T] \{\sigma\} + [CAT] \{NP\}, \quad (2.57)$$

e denominando

$$\begin{bmatrix} A_{\sigma d o}^t \end{bmatrix} = [CAT] [T], \quad (2.58)$$

$$\left\{ R_{\sigma} \right\} = [CAT]\{NP\}, \quad (2.59)$$

a equação (2.57) pode ser escrita na sua forma incremental como:

$$[CAT]\{\Delta NM\} = [CAT]\{\Delta \sigma\} + [CAT]\{\Delta NP\} = \left[A^t_{\sigma d o} \right] \{\Delta \sigma\} + \left[\Delta R_d \right], \quad (2.60)$$

onde

$$\left\{ \Delta R_d \right\} = [CAT]\{\Delta NP\} \quad (2.61)$$

e

$$\{\Delta \sigma\} = \left\{ \Delta n \quad \Delta m_1 \quad \Delta^1 m_2 \quad \Delta^2 m_2 \quad \Delta^1 m_3 \quad \Delta^2 m_3 \right\}^T. \quad (2.62)$$

Chama-se de $\left\{ R_{\sigma} \right\}$ o vetor expresso por

$$\left\{ R_{\sigma} \right\} = \int_0^1 [F]^t \{W\} dx_1 - \{D\}, \quad (2.63)$$

onde $\{W\}$ pode ser escrito de modo diferente de (2.51):

$$\left[W \right] = \left\{ \frac{N}{EA} \quad \frac{\hat{M}_1}{GI_1} \quad \frac{\hat{M}_2}{EI_2} \quad \frac{\hat{M}_3}{EI_3} \right\}^T. \quad (2.64)$$

As forças generalizadas são funções do campo dos carregamentos e do campo dos deslocamentos devido à existência da matriz transformação $[CAT]$. Conseqüentemente, o estado incremental para $\{W\}$ é dado por

$$\{\Delta W\} = [C][F]\{\Delta \sigma\} + \Delta q_q + \Delta q_{\theta} \quad (2.65)$$

sendo $[C]$ a matriz das relações constitutivas e

$$\left\{ \Delta q_o \right\} = [B]\{\Delta d\}, \quad (2.66)$$

Integrando a expressão (2.65), obtém-se

$$\int_0^1 [F]^T [\Delta W] dx_1 = \int_0^1 [F]^T [C] \left([F]\{\Delta \sigma\} + \left\{ \Delta q_q \right\} + [B]\{\Delta d\} \right) dx_1, \quad (2.67)$$

e adotando-se nova nomenclatura para (2.67), têm-se

$$\int_0^1 [F]^T [C] [F] dx_1 = [A_{\sigma\sigma}], \quad (2.68)$$

$$\int_0^1 [F]^T [C] \left\{ \Delta q_q \right\} dx_1 = \left\{ \Delta R_\sigma \right\} \quad (2.69)$$

e

$$\int_0^1 [F]^T [C] [B] dx_1 = [A_{\sigma dc}^t]. \quad (2.70)$$

Conseqüentemente, a equação (2.67) toma a forma

$$\int_0^1 [F]^T \{\Delta W\} dx_1 = [A_{\sigma\sigma}] \{\Delta\sigma\} + \left\{ \Delta R_\sigma \right\} + [A_{\sigma dc}^t] \{\Delta d\}. \quad (2.71)$$

Substituindo (2.57), (2.60), (2.71) em (2.53), reagrupando os termos e supondo que $\{\sigma\}$ seja nulo para o primeiro passo, obtém-se,

$$\begin{aligned} \sum_{e=1} \left\{ \delta \Delta d^T \left([A_{dd}] \{\Delta d\} + [A_{\sigma do}^t] \{\Delta\sigma\} + \left\{ \Delta R_d \right\} + [A_{\sigma do}^t] \{\sigma\} + \left\{ R_d \right\} \right) + \right. \\ \left. + \delta \Delta\sigma^T \left(-[A_{\sigma\sigma}] \{\Delta\sigma\} + ([H\theta] - [A_{\sigma dc}]) \{\Delta d\} - \left\{ \Delta R_\sigma \right\} - \left\{ R_\sigma \right\} \right) = 0 \right\}, \quad (2.72) \end{aligned}$$

que corresponde à equação do elemento finito.

Visto que a expressão (2.72) foi minimizada em relação aos campos de tensão e deslocamento e que $\{\Delta\sigma\}$ e $\{\Delta d\}$ são arbitrários, têm-se

$$[A_{dd}] \{\Delta d\} + [A_{\sigma do}^t] \{\Delta\sigma\} + \left\{ R_d \right\} + \left\{ \Delta R_d \right\} + [A_{\sigma do}^t] \{\sigma\} = 0 \text{ e} \quad (2.73a)$$

$$-[A_{\sigma\sigma}] \{\Delta\sigma\} + ([H\theta] - [A_{\sigma dc}]) \{\Delta d\} - \left\{ \Delta R_\sigma \right\} - \left\{ R_\sigma \right\} = 0. \quad (2.73b)$$

Fazendo

$$[A_{\sigma d}] = [H\theta] - [A_{\sigma dc}], \quad (2.74)$$

obtém-se uma expressão para $\{\Delta\sigma\}$ para cada estado incremental na forma

$$\{\Delta\sigma\} = [A_{\sigma\sigma}]^{-1} \left([A_{\sigma d}] \{\Delta d\} - \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} - \left\{ R_{\sigma} \right\} \right). \quad (2.75)$$

Substituindo (2.60) em (2.73a), chega-se a

$$\begin{aligned} \left([A_{\sigma d o}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} [A_{\sigma d}] + [A_{dd}] \right) \{\Delta d\} &= [A_{\sigma d o}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} - \\ - \left\{ \Delta R_d \right\} + [A_{\sigma d o}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} \left\{ R_{\sigma} \right\} &- [A_{\sigma d o}^t] \left\{ \sigma \right\} - \left\{ R_d \right\} \end{aligned} \quad (2.76)$$

cujos termos podem ser agrupados de modo familiar como segue [7, 16-19]:

$$\left[K_T \right] = [A_{\sigma d d}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} [A_{\sigma d}] + [A_{dd}], \quad (2.74)$$

$$\left\{ \Delta Q \right\} = [A_{\sigma d o}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} - \left\{ \Delta R_d \right\} \quad e \quad (2.75)$$

$$\left\{ R \right\} = [A_{\sigma d o}^t] [A_{\sigma\sigma}]^{-1} \left\{ R_{\sigma} \right\} - [A_{\sigma d o}^t] \left\{ \sigma \right\} - \left\{ R_d \right\}, \quad (2.76)$$

de sorte que a equação de elementos finitos leva a

$$\left[K_T \right] \left\{ \Delta d \right\} = \left\{ \Delta Q \right\} + \left\{ R \right\}. \quad (2.77)$$

PROBLEMA ELASTOPLASTICO PARA ESTRUTURAS RETICULARES

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, abordam-se alguns conceitos básicos de plasticidade, determina-se a matriz de rigidez elastoplástica e deduzem-se as funções de escoamento para vigas de seção transversal retangular.

Primeiramente, alguns conceitos de plasticidade são enfocados para facilitar a compreensão do método de nós plásticos associado a elementos finitos proposto por Ueda [1] e utilizado por Shi, Kondoh, Haldar e Wong [16-18, 20, 24].

A partir dos conceitos mencionados acima, particulariza-se e minimiza-se o funcional (2.30) para que a matriz de rigidez seja obtida.

Finalmente, a partir da premissa de que o material seja elástico-perfeitamente plástico, deduzem-se as equações de escoamento, a fim de que a matriz de rigidez, para o presente problema, seja obtida.

3.2. CONCEITOS BÁSICOS

3.2.1. CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO

A condição de escoamento é uma hipótese necessária para a deformação ou escoamento plástico. Ela define o limite elástico de um material sob um estado de tensões.

Esta condição é dada pela função de escoamento

$$f(\sigma) = F(\sigma) - k = 0, \quad (3.1)$$

que pode ser considerada como uma superfície no espaço de tensões, sobre a qual qualquer modelo elástico não é mais válido. A partir deste momento, a deformação passa a depender não somente do estado atual de tensões mas, também, da história do carregamento. Portanto, as relações tensão-deformação conhecidas da elasticidade precisam ser substituídas por relações incrementais de tensão e deformação específicas para o caso de escoamento plástico [27].

A obtenção das expressões que caracterizam as superfícies de escoamento, em termos de forças generalizadas atuantes nas seções transversais, constitui, em todas as situações não triviais, um problema difícil. As formas fechadas encontradas na literatura são limitadas a casos especiais que dependem da escolha das forças generalizadas, das diferentes formas da seção transversal das vigas e da teoria de viga empregada, não existindo uma expressão para superfície de escoamento para vigas no espaço, que envolva todas as seis forças generalizadas da seção transversal, definidas no capítulo 2, fig. 2.2.

Existe uma literatura bastante vasta sobre condição de escoamento em termos de forças generalizadas [11, 27-29, 33, 36-37]. A variedade de métodos usados reflete-se na existência de um grande número de diferentes condições de estados-límites. Entre os mais comumente usados, estão aqueles baseados nos teoremas estáticos e dinâmicos da análise limite, bem como aqueles derivados das funções de tensão de Prandtl.

As condições de estado-limite desenvolvidas em Argyris et al., que envolvem duas, no máximo três forças generalizadas, parecem suficientes para modelar as estruturas planas [29]. Para estruturas tridimensionais, tem-se de escolher as duas ou três mais significativas das seis forças generalizadas, dependendo de cada caso, e determinar uma condição

simplificada de estado limite.

Como mencionado, as superfícies plásticas dependem fortemente das propriedades geométricas da seção transversal. As vigas podem ser consideradas de dois tipos: as com seção transversal maciça e aquelas com seção transversal vazada, com parede fina. Em [28], são deduzidas equações de escoamento de limite inferior para estes dois tipos comuns de seção transversal, considerando-se hipóteses simplificadoras sobre a posição da linha neutra. Também é mostrado um método para selecionar a função de escoamento sobre a qual incidirá o vetor incremento de força visto que a superfície de escoamento é geralmente uma composição de diversos elementos de superfície [28].

Para um material elástico-perfeitamente plástico, a superfície de escoamento é fixa e não há trabalho plástico secundário, pois, pela regra de normalidade de Drucker [38], as deformações plásticas são normais à superfície de escoamento e ortogonais aos incrementos de força do elemento, resultando

$$\{d\epsilon\}\{df\} = 0. \quad (3.2)$$

Em alguns dos métodos relatados em [25], são usadas superfícies de escoamento poliédricas. Em tais superfícies é relativamente fácil satisfazer a condição de normalidade e o critério de escoamento quando for atingido o estado plástico nos nós dos elementos.

A magnitude da deformação plástica $\{\epsilon^P\}$ para materiais perfeitamente plásticos é ilimitada durante o escoamento e conseqüentemente, consideram-se variações infinitesimais ou incrementos de deformação $d\{\epsilon^P\}$. Supõe-se que o tensor incremental de deformação total seja a soma dos incrementos elástico e plástico,

$$d\{\epsilon\} = d\{\epsilon^e\} + d\{\epsilon^P\}, \quad (3.3)$$

sendo que o estudo referente à parte elástica foi desenvolvido no capítulo 2.

3.2.2. FUNÇÃO POTENCIAL PLÁSTICO

Na teoria da elasticidade, a deformação elástica pode ser obtida diretamente pela diferenciação da Função Potencial Elástico ou pela Função

Densidade de Energia Complementar. Von Mises [38] propôs, por similitude, o conceito de Função Potencial Plástico, uma função escalar de tensão, $g(\sigma)$, a partir da qual as equações de deformação plástica podem ser obtidas na forma

$$d\{\epsilon^P\} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}}, \quad (3.4)$$

onde $d\lambda$ é um fator escalar de proporcionalidade que assume valor diferente de zero somente quando ocorrer deformação plástica. A equação $g(\sigma_{ij}) = \text{cte}$ define a superfície do potencial plástico. Os cossenos diretores do vetor normal à superfície no ponto σ são proporcionais ao gradiente $\frac{\partial g}{\partial \{\sigma\}}$ naquele ponto. Isto implica que o vetor incremento de deformação é considerado como um vetor livre no espaço de tensões e é direcionado ao longo da normal à superfície de potencial plástico [14, 38], conforme fig. 3.1.

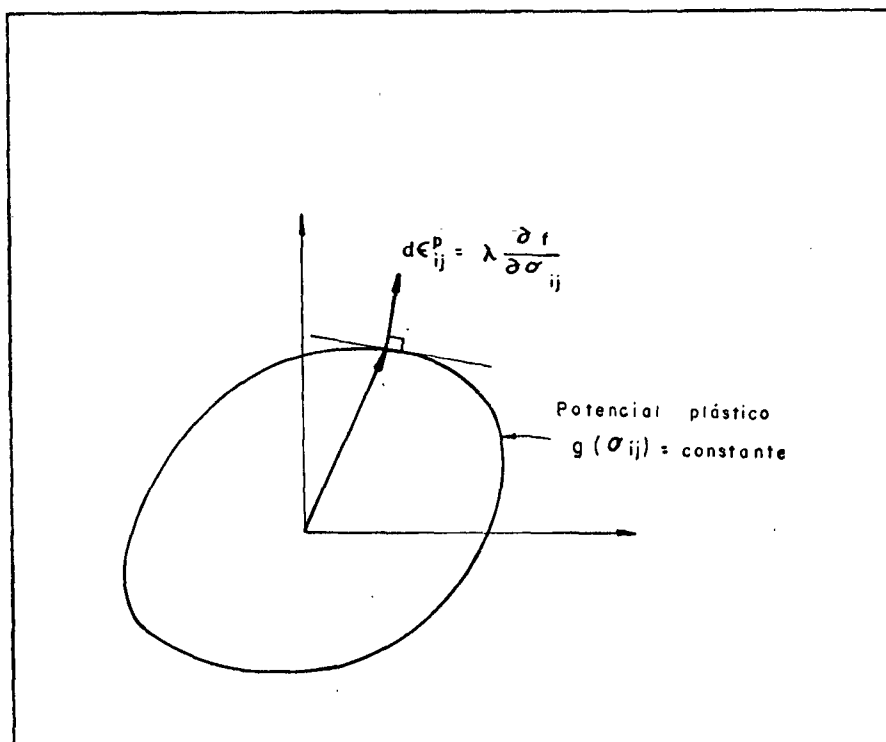


Figura 3.1: Função potencial plástico.

3.2.3. REGRA ASSOCIADA DE ESCOAMENTO

A assim chamada plasticidade associada é caracterizada pela situação em que a função de escoamento e a função potencial plástico coincidem, ou seja, $f = g$. Então,

$$d\{\epsilon^P\} = d\lambda \frac{\partial \ell}{\partial \{\sigma\}}, \quad (3.5)$$

ficando a deformação plástica, desta forma, conectada com o critério de escoamento [38]. Quando se trabalha com materiais estáveis, a função de escoamento constitui-se numa função de potencial plástico.

Von Mises [38] utilizou esta regra para desenvolver as relações tensão-deformação em metais, sendo válida para materiais plásticos irreversíveis, para os quais o trabalho gasto na deformação plástica não pode ser recuperado.

A lei de tensão-deformação de um material baseada na regra associada de escoamento resulta em uma solução única para problema a valor no contorno [38].

3.3. MÉTODO DOS NÓS PLÁSTICOS

O método dos nós plásticos [1] baseia-se na premissa de que a deformação plástica ocorra somente nos nós do elemento e que dentro dos mesmos ela seja sempre elástica. A condição de escoamento plástico é definida em cada nó de um elemento individual que compõe a estrutura global. Então, a condição de escoamento é descrita como segue: o nó i de um elemento se torna um nó plástico quando as forças generalizadas do elemento naquele nó satisfazem a condição de escoamento adotada.

3.4. MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTOPLÁSTICA

Se surge um nó plástico no elemento, este elemento começa a trabalhar na fase plástica. Portanto, o vetor campo de tensões se encontra sobre a superfície determinada pela função de escoamento [38]

$$\ell(N, \hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, k) = F(N, \hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) - k = 0, \quad (3.6)$$

e, enquanto o nó plástico estiver sendo carregado, a condição de normalidade tem de ser satisfeita em cada nó plástico, visto que, para materiais perfeitamente plásticos, um ponto no campo de tensões não pode se mover para fora da superfície de escoamento. Qualquer carregamento adicional do tem de se mover, portanto, ao longo da direção tangencial à superfície.

Conseqüentemente, a condição (3.7) tem de ser mantida para continuação do escoamento plástico. O método empregado neste controle será abordado posteriormente.

$$d\ell = \frac{\partial \ell}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial \ell}{\partial M_1} \hat{\Delta M}_1 + \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \hat{\Delta M}_2 + \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \hat{\Delta M}_3 = 0 \quad (3.7)$$

Quando a regra associada de escoamento é aplicada, considerando-se a condição de escoamento ℓ , o incremento das deformações plásticas generalizadas, ou seja, o deslocamento nodal plástico du^P , é representado por

$$du^P = d\lambda \frac{\partial \ell}{\partial \{\sigma\}}, \quad (3.8)$$

ao invés de o ser pela expressão (3.4). De um modo particular, as deformações incrementais generalizadas na rótula são dadas por

$$\Delta H_p = \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial N} \quad (3.9a)$$

e

$$\Delta \theta_{pi}^* = \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial M_i}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (3.9b)$$

onde ΔH_p é o incremento da elongação H_p , e $\Delta \theta_{pi}^*$ é o incremento da rotação plástica θ_{pi}^* .

A elongação e as rotações plásticas totais são dadas por

$$H_p = \sum (\Delta H_p) \quad (3.10a)$$

e

$$\theta_{pi}^* = \sum (\Delta \theta_{pi}^*). \quad (3.10b)$$

Em consequência disto, as condições de compatibilidade (2.39.a, b, c), na presença das deformações plásticas, são acrescidas das parcelas (3.10), ficando com a forma abaixo:

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial N} \delta N \, dx_1 + H_p \delta N = H \delta N, \quad (3.11a)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_1} \delta M_1 \, dx_1 + \theta_{p1}^* \delta M_1 = \left({}^2\theta_1^* - {}^1\theta_1^* \right) \delta M_1, \quad (3.11b)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_2} \delta M_2 d\hat{x}_1 + \theta_{p2}^* \delta M_2 = {}^1\theta_2^* \delta^1 M_2 - {}^2\theta_2^* \delta^2 M_2 \quad (3.11c)$$

e

$$\int_0^1 \frac{\partial W_c}{\partial M_3} \delta M_3 d\hat{x}_1 + \theta_{p3}^* \delta M_3 = {}^1\theta_3^* \delta^1 M_3 - {}^2\theta_3^* \delta^2 M_3. \quad (3.11d)$$

Logo, a forma fraca para a análise plástica é obtida adicionando-se à expressão 2.47 o termo

$$\sum - \left\{ H \delta N + \theta_{p1}^* \delta M_1 + \theta_{p2}^* \delta M_2 + \theta_{p3}^* \delta M_3 + \right. \\ \left. + \delta \lambda \left(\frac{\partial \ell}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial \ell}{\partial M_1} \Delta \hat{M}_1 + \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \Delta \hat{M}_2 + \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \Delta \hat{M}_3 \right) \right\}, \quad (3.12)$$

para o estado incremental, que toma a forma abaixo:

$$\left\{ H \Delta \delta N + \theta_{p1}^* \Delta \delta M_1 + \theta_{p2}^* \Delta \delta M_2 + \theta_{p3}^* \Delta \delta M_3 + \right. \\ \left. + \Delta \lambda \left(\frac{\partial \ell}{\partial N} \Delta \delta N + \frac{\partial \ell}{\partial M_1} \Delta \delta \hat{M}_1 + \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \Delta \delta \hat{M}_2 + \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \Delta \delta \hat{M}_3 \right) \right\} - \\ - \left\{ \delta \Delta \lambda \left(\frac{\partial \ell}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial \ell}{\partial M_1} \Delta \hat{M}_1 + \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \Delta \hat{M}_2 + \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \Delta \hat{M}_3 \right) \right\}. \quad (3.13)$$

Deste modo, a expressão que origina a matriz de rigidez é dada por

$$\sum_{e1} \left\{ \delta \Delta d^T \left(\left[A_{dd} \right] \{ \Delta d \} + \left[\hat{A}_{\sigma d o} \right] \{ \Delta \hat{\sigma} \} + \left\{ \Delta R_d \right\} + \left\{ R_d \right\} + \left[\hat{A}_{\sigma d o} \right] \{ \hat{\sigma} \} \right) \right. \\ \left. + \delta \Delta \hat{\sigma}^T \left(- \left[\hat{A}_{\sigma \sigma} \right] \{ \Delta \hat{\sigma} \} + \left[\hat{A}_{\sigma d} \right] \{ \Delta d \} - \left\{ \Delta \hat{R}_\sigma \right\} - \left\{ \hat{R}_\sigma \right\} \right) \right\} = 0, \quad (3.14)$$

sendo a matriz elastoplástica e os demais componentes do sistema apresentados como [16-19]:

$$\left[\hat{K}_T \right] = \left[K \right] - \left[A_{\sigma d o} \right] \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ G \right\} \left[C \right] \left[A_{\sigma d} \right], \quad (3.15)$$

$$\left\{ \hat{\Delta Q} \right\} = \left[A_{\sigma d o} \right] \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} - \left\{ G \right\} \left[C^T \right] \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} \right\} - \left\{ \Delta R_d \right\} +$$

$$\left[A_{\sigma d o} \right] \left[C^T \right] \left\{ G \right\} \{ \Delta \sigma \}, \quad (3.16)$$

$$\left\{ \hat{R} \right\} = \left[A_{\sigma d o} \right] \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ \left\{ R_{\sigma} \right\} - \left\{ G \right\} \left[C^T \right] \left\{ R_{\sigma} \right\} \right\} - \left\{ R_d \right\} - \left[A_{\sigma d o} \right] \{ \sigma \}, \quad (3.17)$$

$$\left\{ \hat{\Delta \sigma} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \sigma \\ \Delta \lambda \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

onde

$$\{ \Delta \sigma \} = \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ \left[A_{\sigma d} \right] \{ \Delta d \} - \left\{ R_{\sigma} \right\} - \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} \right\} -$$

$$- \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ G \right\} \left[C^T \right] \left\{ \left[A_{\sigma d} \right] \{ \Delta d \} - \left\{ R_{\sigma} \right\} - \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} \right\} - \left[C^T \right] \left\{ G \right\} \{ \Delta \sigma_p \}$$

$$(3.18a)$$

e

$$\{ \Delta \lambda \} = \left[C^T \right] \left\{ \left[A_{\sigma d} \right] \{ \Delta d \} - \left\{ R_{\sigma} \right\} - \left\{ \Delta R_{\sigma} \right\} \right\} +$$

$$\left\{ \left\{ G^T \right\} \left[A_{\sigma \sigma} \right]^{-1} \left\{ G \right\} \right\}^{-1} \left\{ G^T \right\} \{ \Delta \sigma_p \} \quad (3.18b)$$

Para maiores detalhes, os vetores e matrizes do caso plástico são especificados no Apêndice C.

3.5. ESCOLHA DO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Como mencionado anteriormente, existe uma vasta literatura sobre funções de escoamento, a qual fornece diversos critérios de escoamento expressos através de funções de escoamento poliédricas, por várias funções ou por uma única função. Cada tipo possui vantagens e desvantagens.

Quando são usadas funções de escoamento poliédricas, figura 3.2, o estado de tensões como B, sobre o hiperplano de escoamento, mover-se-á ao longo do hiperplano B' durante o passo de carga, tornando-se fácil satisfazer as condições de normalidade e escoamento para os nós onde

ocorreu o escoamento plástico. Por outro lado, como a condição de escoamento é construída por várias faces planas, é necessário aumentar a matriz gradiente da função escoamento $\{G\}$ de cada elemento, visto que cada face representa uma condição de escoamento que deve ser satisfeita de acordo com o estado de tensões. Desta forma, a matriz gradiente da função de escoamento passa a ter o mesmo número de colunas que o número de faces da função poliédrica.

Empregando estas funções, pode-se determinar diretamente o incremento de carga requerido para passar do estado elástico ao estado elastoplástico. Contudo, deve-se fazer uma pesquisa a fim de determinar sobre qual face se encontra o estado de tensões.

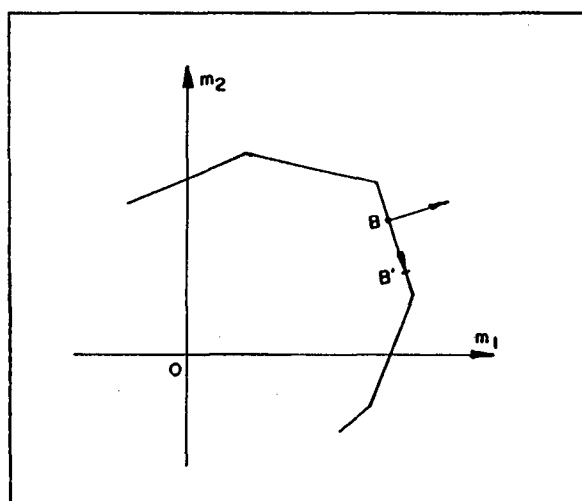


Figura 3.2.: Função de escoamento poliédrica.

Quando se empregam superfícies de escoamento compostas por múltiplas funções, embora o tamanho de $\{G\}$ seja menor, também é necessário fazer uma pesquisa para determinar sobre qual superfície repousa o vetor incremento de tensão.

Se uma única equação expressa a superfície de escoamento, podem existir somente três formas não nulas de $\{G\}$ para um elemento: uma forma para a rótula no nó i , uma para a rótula no nó j e uma para a rótula plástica nos dois nós.

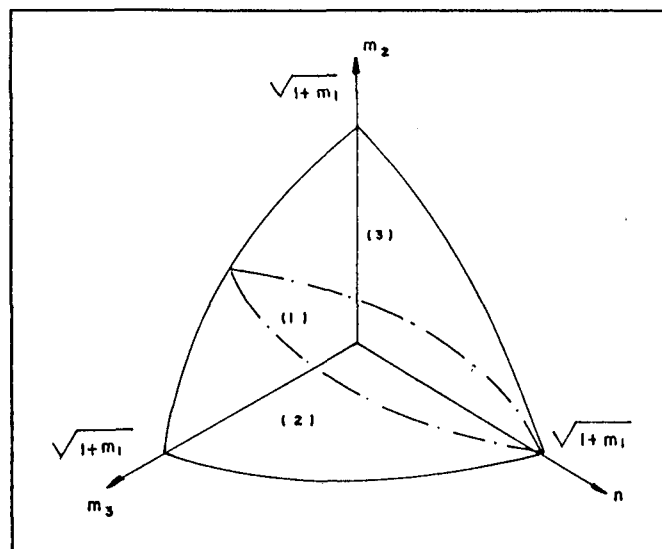


Figura 3.3: Função de escoamento composta por múltiplas funções.

Embora neste tipo de equação seja necessário empregar um procedimento iterativo para determinar o incremento de carga do estado elástico para o estado elastoplástico, é preciso comparar o estado de tensões somente com uma função de escoamento, enquanto para as que empregam várias funções de escoamento, é necessário comparar com cada tipo de função.

O uso de uma única função de escoamento se caracteriza por uma grande economia de tempo computacional, e o sucesso do seu uso depende de um esquema para controlar, de maneira satisfatória, o movimento do ponto das forças generalizadas sobre a superfície de escoamento, quando ocorrer a plastificação.

Considerando-se as vantagens oferecidas por uma superfície de escoamento expressa por uma única função, a seguir apresentam-se o critério de plastificação e suas derivadas.

Para o caso de viga com seção transversal retangular para estruturas espaciais, implementou-se a função [30].

$$\left(\frac{M_y}{M_{uy}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{uz}} \right)^2 = 1, \quad (3.20)$$

onde

$$M_{uy} = M_{py} \left[1 - \left(N/N_p \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad M_{uz} = M_{pz} \left[1 - \left(N/N_p \right)^2 \right], \quad (3.21)$$

cujas derivadas são:

$$\frac{\partial \ell}{\partial N} = \frac{4N}{N_p^2 [1 - (N/N_p)^2]^3} [(M_2/M_{p2})^2 + (M_3/M_{p3})^2],$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial M_2} = \frac{2\hat{M}_2}{M_{p2}^2 [1 - (N/N_p)^2]^2}$$

e

$$\frac{\partial \ell}{\partial M_3} = \frac{2\hat{M}_3}{M_{p3}^2 [1 - (N/N_p)^2]^2},$$

onde:

N_p é a força normal plástica e
 M_{pi} são momentos fletores plásticos.

3.6. CONTROLE DO DESLOCAMENTO DO PONTO DAS FORÇAS GENERALIZADAS SOBRE A SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO

O termo de redução da matriz elastoplástica restringe o campo de forças atuantes nas rótulas plásticas a se mover tangente à superfície de escoamento. Se estas forças não forem controladas para permanecer na superfície, o critério de escoamento pode ser violado.

A figura 3.4 ilustra o movimento das forças atuantes em uma rótula plástica durante a aplicação dos incrementos de carga. Suponha-se que, inicialmente, os esforços atuantes na seção transversal sejam dados pelo ponto A e que a condição de normalidade entre o incremento de forças e o gradiente da função de escoamento no ponto seja satisfeita. Quando o incremento de carga for aplicado, ele provoca um deslocamento de A para B, tangencial à superfície, violando a condição de escoamento. No caso da análise numérica incremental, os incrementos de esforços são finitos, o que leva o ponto B para fora da superfície de escoamento. Tudo se passa como se a superfície sofresse uma expansão, mostrando comportamento característico de estados plásticos com encruamento. O erro introduzido pelo afastamento do ponto de tensões da superfície de escoamento viola a hipótese de comportamento perfeitamente plástico.

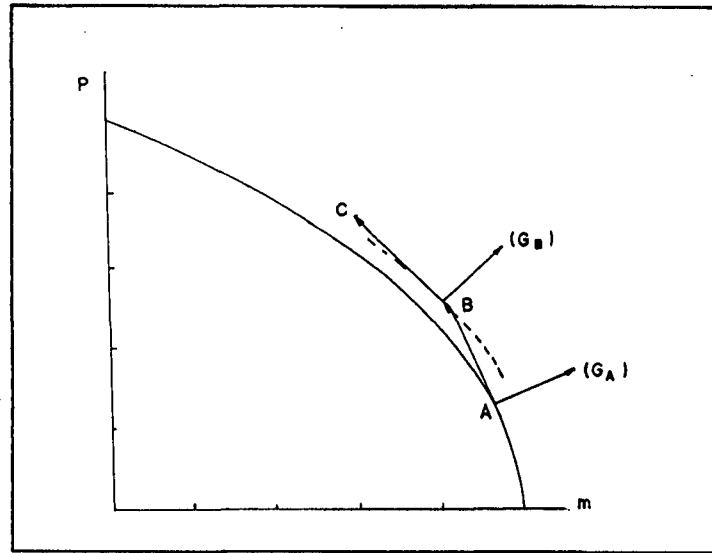


Figura 3.4: Deslocamento das forças sobre a superfície de escoamento.

Diversas abordagens, para prevenir ou controlar o problema de afastamento do ponto de tensões da superfície de escoamento, são conhecidas [14, 26, 38, 40]. O método empregado neste trabalho é baseado no processo de "tensão inicial" [14], sendo os seus passos, durante um incremento de carregamento para uma situação elastoplástica, resumidos como:

1. Aplica-se o incremento de carga e determinam-se os incrementos elásticos de tensão $\{\Delta\sigma'\}$ e deformação $\{\Delta\epsilon'\}$ correspondentes.
2. Soma-se $\{\Delta\sigma'\}$ às tensões existentes no início do incremento $\{\sigma_0\}$. Verifica-se se $F(\sigma') < 0$. Se a condição for satisfeita, somente ocorre a deformação elástica e o processo é interrompido. Se não, executa-se 3.
3. Se $F(\sigma') \geq 0$ e também $F(\sigma_0) = 0$, o elemento já teria escoado no início do incremento. Desta forma, calcula-se $\{\Delta\sigma\}$ pela equação (3.18) com as tensões $\{\sigma'\}$. Ver figura 3.5.

Calcula-se a tensão que tem de ser resistida pelas forças de corpo

$$\{\Delta\sigma''\} = \{\Delta\sigma'\} - \{\Delta\sigma\}. \quad (3.23)$$

Armazenam-se a tensão atual $\{\sigma\} = \{\sigma'\} - \{\Delta\sigma''\}$ e a deformação $\{\epsilon''\} = \{\epsilon'\} - \{\Delta\epsilon\}$.

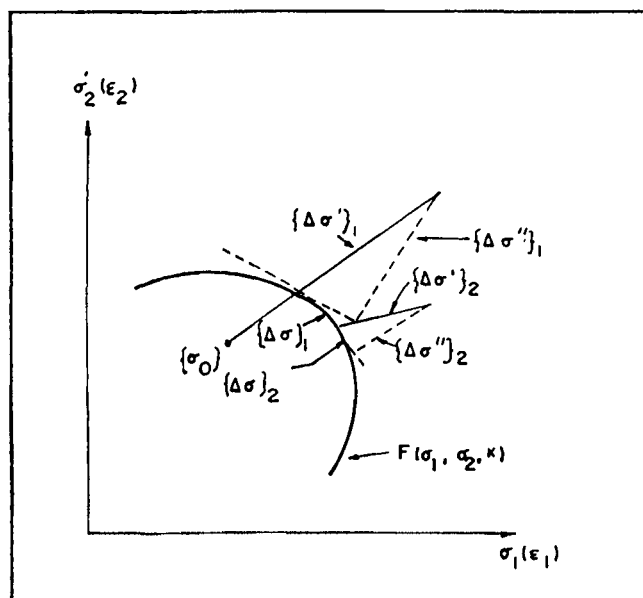


Figura 3.5: Interpretação gráfica do processo de "tensão inicial".

4. Se $F(\sigma) > 0$ mas $F(\sigma_0) < 0$, encontra-se o valor intermediário de tensões para o qual começa o escoamento, empregando-se a expressão [38]

$$r = \frac{-F(\sigma)}{\{G\}_{\sigma} \{\Delta\sigma\}} \quad (3.24)$$

e calcula-se o incremento de tensão $\{\Delta\sigma\}$, começando do nível de tensões que causou o escoamento conforme figura 3.6. Então, executa-se 3.

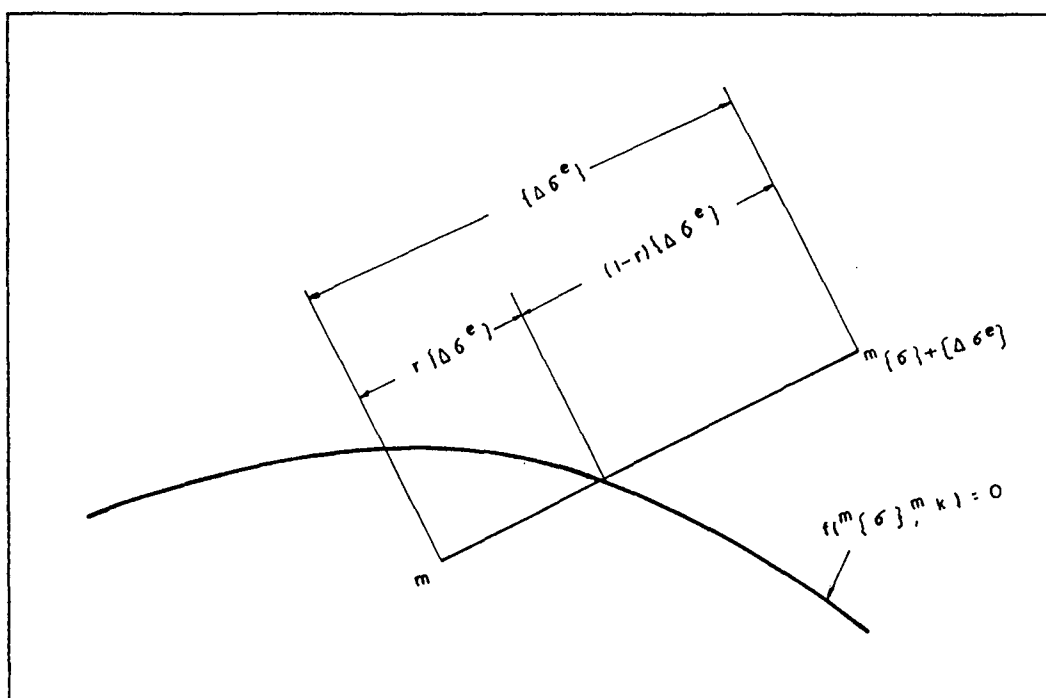


Figura 3.6: Ilustração esquemática da entrada no estado elastoplástico.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELÁSTICOS E ELASTOPLÁSTICOS DE ESTRUTURAS RETICULARES PLANAS E ESPACIAIS

4.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo, são estudados casos de estruturas planas e espaciais submetidas a grandes deslocamentos, a fim de analisar a validade desta formulação.

A partir da formulação apresentada nos capítulos 2 e 3, desenvolveu-se um programa computacional, a fim de resolver numericamente problemas elastoplásticos em estruturas reticulares planas e espaciais, adotando-se o método de Newton-Raphson modificado na resolução do sistema incremental de equações. Para testar o desempenho deste programa, primeiramente foram resolvidos problemas estruturais básicos.

4.2. ANÁLISE ELÁSTICA

4.2.1. VIGA EM BALANÇO

O primeiro exemplo constitui-se na análise elástica de uma viga em balanço de seção transversal quadrada de 1 cm de lado, possuindo comprimento igual a 50 cm, módulo de elasticidade $E = 21,0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ e momentos de inércia $I_2 = I_3 = 8,33 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, submetida a um carregamento concentrado na sua extremidade, conforme a figura 4.1 abaixo.

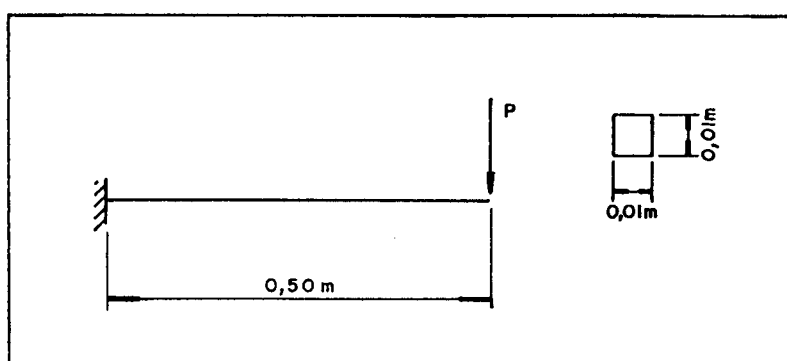


Figura 4.1: Viga em balanço.

Nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4 são comparados os resultados obtidos nesta análise com os da solução analítica fornecida por Ashwell [41], onde as deflexões axiais u e transversais v da extremidade livre da viga, considerando-se grandes deslocamentos, são dadas em termos de integrais elípticas por:

$$v = \sqrt{\frac{EI}{P}} \left[F(k) - F(k, \theta_1) - 2E(k) + 2E(k, \theta_1) \right],$$

$$u = 1 - \sqrt{\frac{2EI \operatorname{sen} \phi}{P}},$$

onde $F(k)$, $F(k, \theta_1)$, $E(k)$ e $E(k, \theta_1)$ são integrais elípticas de primeira ordem completa e incompleta e integrais elípticas de segunda ordem completa e incompleta, respectivamente. O valor de k é dado por

$$k = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{2}},$$

onde ϕ é o valor da rotação do extremo da viga.

Alguns resultados são mostrados nas tabelas 1, 2 e 3.

Verifica-se que a solução obtida usando dois elementos apresenta bons resultados. À medida que se aumenta o número de elementos na modelagem, os resultados obtidos se aproximam da solução analítica fornecida por Ashwell [41].

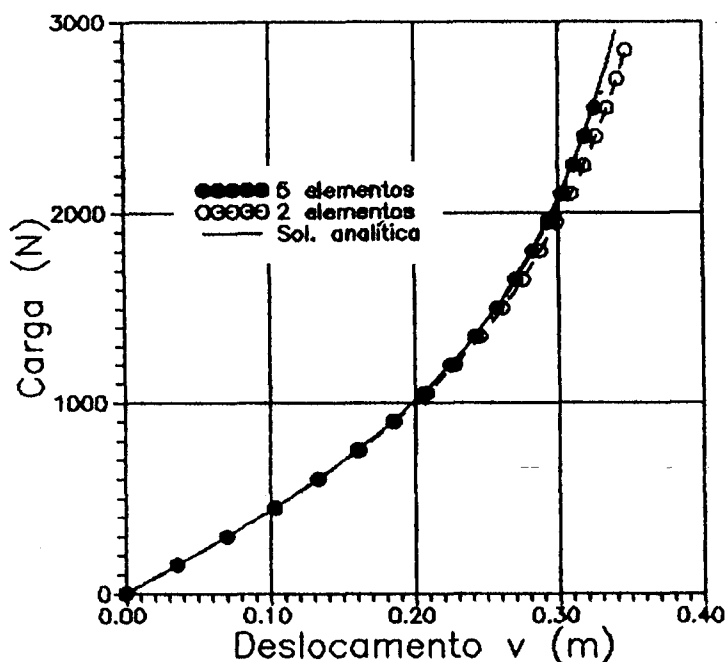


Figura 4.2: Gráfico força-deslocamento transversal para viga em balanço.

No estudo deste exemplo, utilizando a formulação desenvolvida, observou-se o surgimento de instabilidade numérica na faixa de deslocamentos transversais iguais a 66% do comprimento da viga.

Tabela 1: Deslocamento transversal da
extremidade em balanço

Incr.	Carr. (N)	Deslocamento (m)			Erro 2	Erro 5
		Sol. anal.	2 elem.	5 elem.		
184	552,00	0,123201	0,123838	0,123342	0,005170	0,001145
338	1014,00	0,200596	0,203108	0,201046	0,012518	0,002238
530	1590,00	0,264726	0,270140	0,265585	0,020455	0,003246
679	2037,00	0,297830	0,305321	0,298960	0,025155	0,003797
826	2478,00	0,321548	0,330817	0,322900	0,028827	0,004206

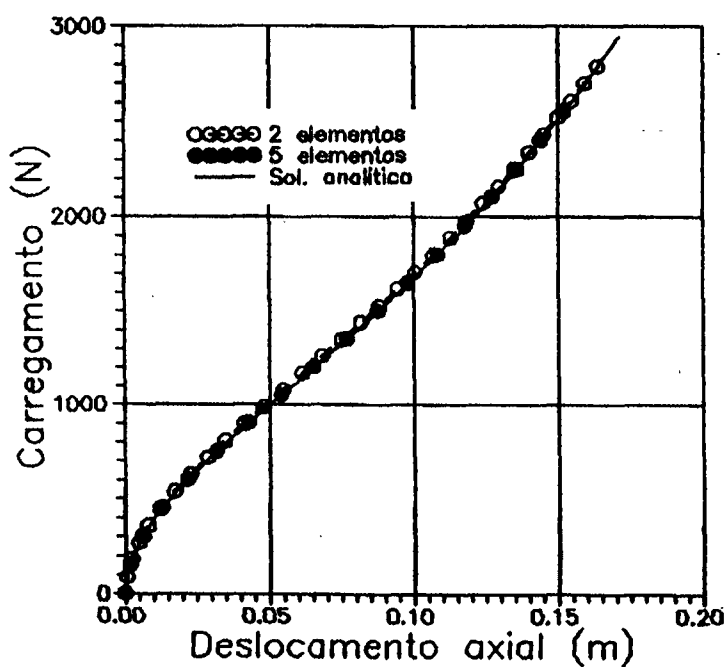


Figura 4.3: Gráfico força-deslocamento axial
para viga em balanço.

Tabela 2: Deslocamento axial da viga em balanço.

Incr.	Carr. (N)	Deslocamento (m)			Erro 2	Erro 5
		Sol. anal.	2 elem.	5 elem.		
184	552,00	0,0175248	0,0178351	0,0184894	0,041594	0,006434
338	1014,00	0,0512656	0,0497153	0,0510280	0,030246	0,004641
530	1590,00	0,0940318	0,0923408	0,0937408	0,017980	0,003091
679	2037,00	0,1234440	0,1221270	0,1231610	0,010667	0,002291
826	2478,00	0,1485010	0,1477697	0,1482420	0,004930	0,001745

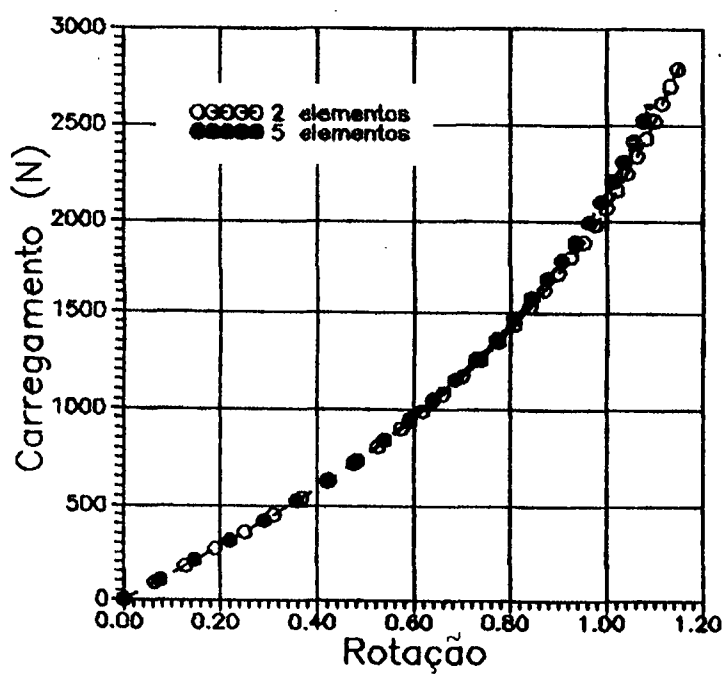


Figura 4.4: Gráfico força-rotação para viga em balanço.

Tabela 3: Rotação da extremidade livre da viga em balanço.

Incr.	Carregamento (N)	Rotação	
		2 elem.	5 elem.
184	552,00	0,375968	0,374707
338	1014,00	0,629867	0,624439
530	1590,00	0,861530	0,849046
679	2037,00	0,992371	0,974524
826	2478,00	1,092180	1,069620

4.2.2. VIGA BIENGASTADA DE WEEKS

Neste caso, analisa-se elasticamente uma viga de seção transversal constante e com vão de 0,508 m, conforme a figura abaixo, cujo módulo de elasticidade é $6,9 \times 10^{10}$ N/m², $I_z = 2,77 \times 10^{-10}$ m⁴, $I_y = 1,079 \times 10^{-9}$ m⁴, $A = 1,29 \times 10^{-4}$ m², estudada por Weeks [42].

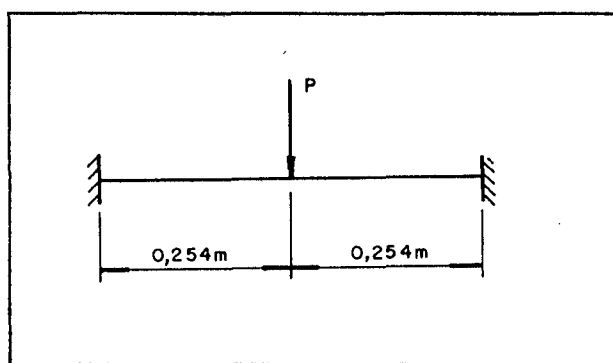


Figura 4.5: Viga biengastada.

Verifica-se que os resultados obtidos no presente trabalho, figura 4.6, concordam razoavelmente com os obtidos por Weeks [42] e apresentam um comportamento oscilatório a medida que se refina a malha, característica esta inerente à formulação mista.

Observou-se, novamente, o aparecimento de instabilidade numérica a partir de um certo valor de carga, utilizando a formulação desenvolvida.

Nas tabelas 4 e 5, apresentam-se alguns valores obtidos.

Tabela 4: Deslocamento transversal no centro do vão.

Incr.	Carreg. (N)	4 elementos	6 elementos
		Deslocamento	Deslocamento
1	3,00	$0,107172 \times 10^{-3}$	$0,107172 \times 10^{-3}$
100	300,00	$0,617579 \times 10^{-2}$	$0,593003 \times 10^{-2}$
200	600,00	$0,870071 \times 10^{-2}$	$0,832720 \times 10^{-2}$
300	900,00	$0,103992 \times 10^{-1}$	$0,995767 \times 10^{-2}$
400	1200,00	$0,117210 \times 10^{-1}$	$0,112366 \times 10^{-1}$

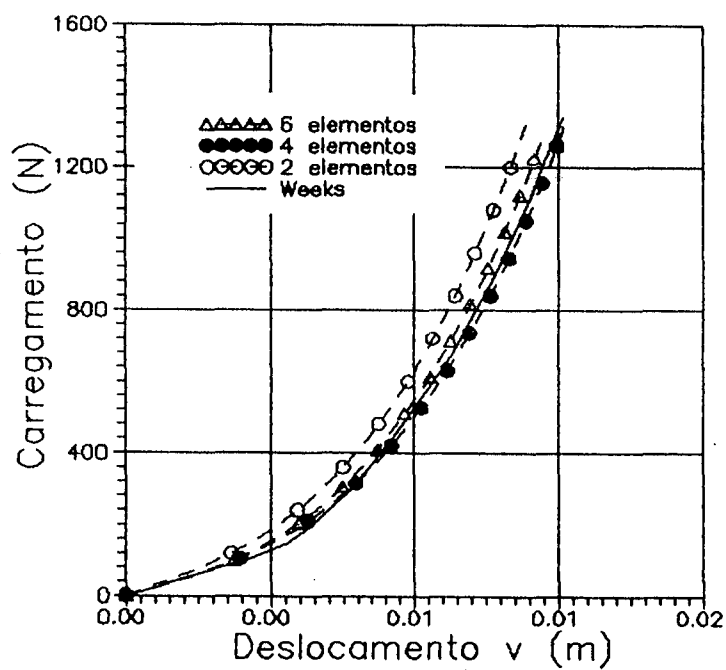


Figura 4.6: Gráfico força-deslocamento no centro do vão de viga biengastada.

Tabela 5: Esforços no engaste.

Incr.	Carreg. (N)	Esforço Normal (N)	Momento Fletor (N.m)
1	3,00	$0,872035 \times 10^0$	$-0,195000 \times 10^0$
100	300,00	$0,263869 \times 10^4$	$-0,111316 \times 10^2$
200	600,00	$0,515615 \times 10^4$	$-0,162655 \times 10^2$
300	900,00	$0,732467 \times 10^4$	$-0,199930 \times 10^2$
400	1200,00	$0,927893 \times 10^4$	$-0,230301 \times 10^2$

A seguir, mostram-se graficamente os resultados apresentados na tabela 5.

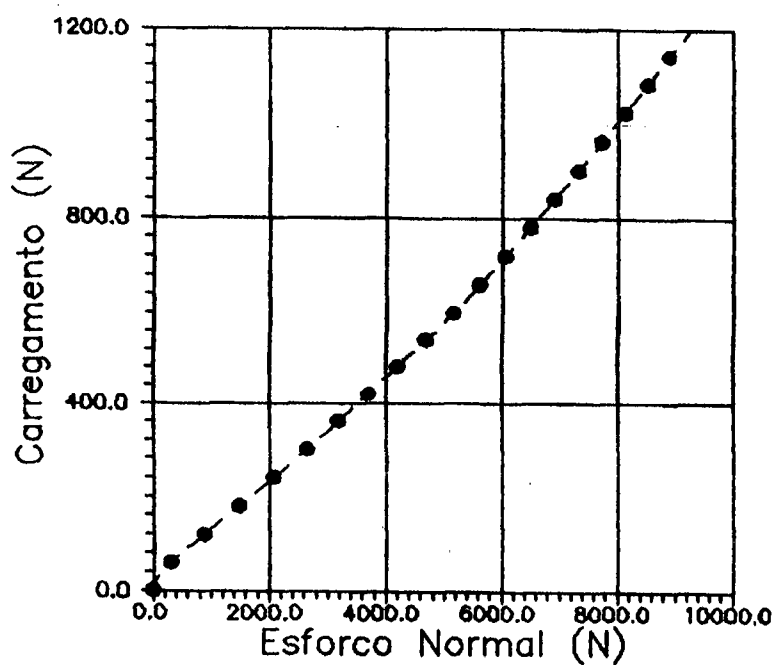


Figura 4.7: Gráfico esforço normal-carregamento.

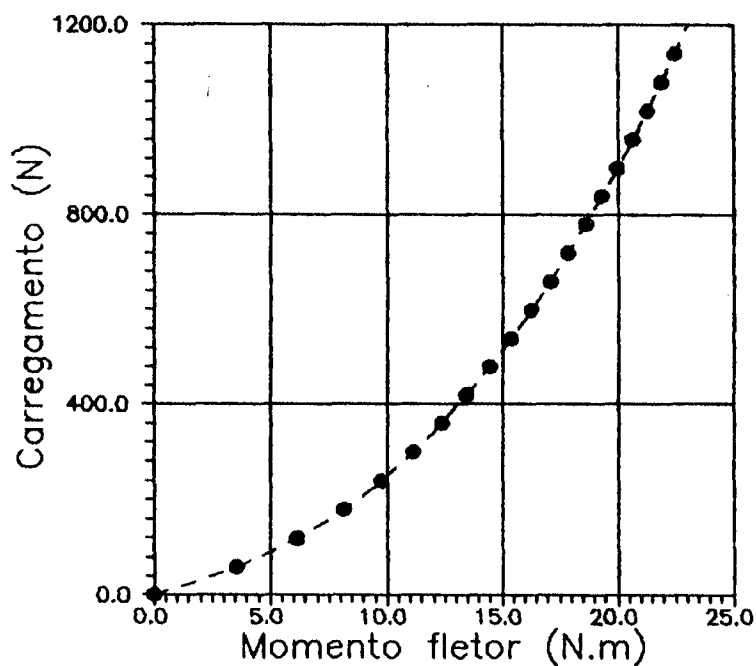


Figura 4.8: Gráfico momento fletor-carregamento.

4.2.3. ESTRUTURA TIPO JUNTA DE WILLIAMS

Neste exemplo, cada segmento de viga foi modelado por um e por dois elementos, usando a presente formulação para realizar a análise elástica da estrutura. Esta estrutura apresenta semivão de $0,329\text{ m}$, uma elevação de $9,8 \times 10^{-3}\text{ m}$ e é composta por dois membros idênticos, cada um com seção transversal retangular de $1,913 \times 10^{-2}\text{ m}$ de largura, $6,172 \times 10^{-3}\text{ m}$ de altura e módulo de elasticidade de $7,107 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$, sendo sujeita a carregamento vertical P aplicado no nó central da estrutura [6, 11].

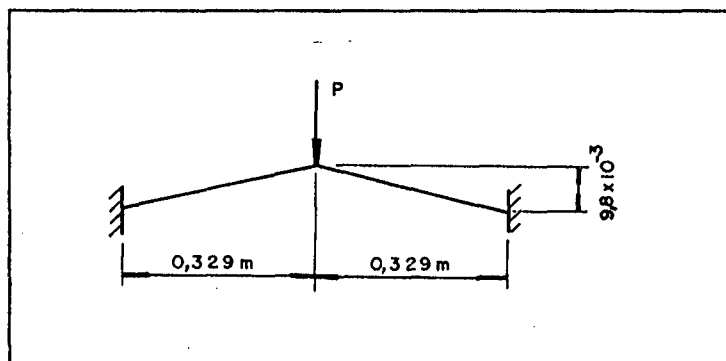


Figura 4.9: Estrutura tipo junta de Williams.

Comparando os resultados com os das referências mencionadas, constata-se que a presente formulação fornece deslocamentos menores que os de Meek e Tan [11] e Kondoh e Atluri [6], conforme mostra a figura 4.10.

Quanto à convergência, nota-se que ela se torna lenta à medida que aumenta o deslocamento total, atingindo o número de 7 iterações para incrementos de 3 N em carregamento de 150 N, onde as forças residuais não são superiores a $1,0 \times 10^{-4}$ N.

As tabelas 6 e 7 e os gráficos 4.11 e 4.12 mostram alguns resultados para incrementos de carga de 3 N, sendo a estrutura modelada por dois elementos e quatro elementos. A análise dos resultados foi efetuada até o nível anterior ao "snap-through", visto que não se dispunha de um método que permitisse a análise além do ponto de instabilidade. Para tanto a literatura indica o uso do método de Riks [43-45].

Tabela 6: Resultados para a junta de Williams.

Incr.	Carreg. (N)	2 elementos		4 elementos	
		Deslocamento	Iter.	Deslocamento	Iter.
1	3,00	$0,476295 \times 10^{-4}$	2	$0,476295 \times 10^{-4}$	2
17	51,00	$0,888540 \times 10^{-3}$	3	$0,947010 \times 10^{-3}$	3
34	102,00	$0,202400 \times 10^{-2}$	4	$0,202400 \times 10^{-2}$	5
50	150,00	$0,358879 \times 10^{-2}$	5	$0,358880 \times 10^{-2}$	7

Tabela 7: Esforços no engaste.

Incr.	Carreg. (N)	Esforço Normal	Momento Fletor
1	3,00	$-0,361321 \times 10^2$	$-0,702713 \times 10^{-1}$
17	51,00	$-0,643672 \times 10^3$	$-0,131098 \times 10^1$
34	102,00	$-0,137716 \times 10^4$	$-0,298641 \times 10^1$
50	150,00	$-0,222512 \times 10^4$	$-0,529558 \times 10^1$

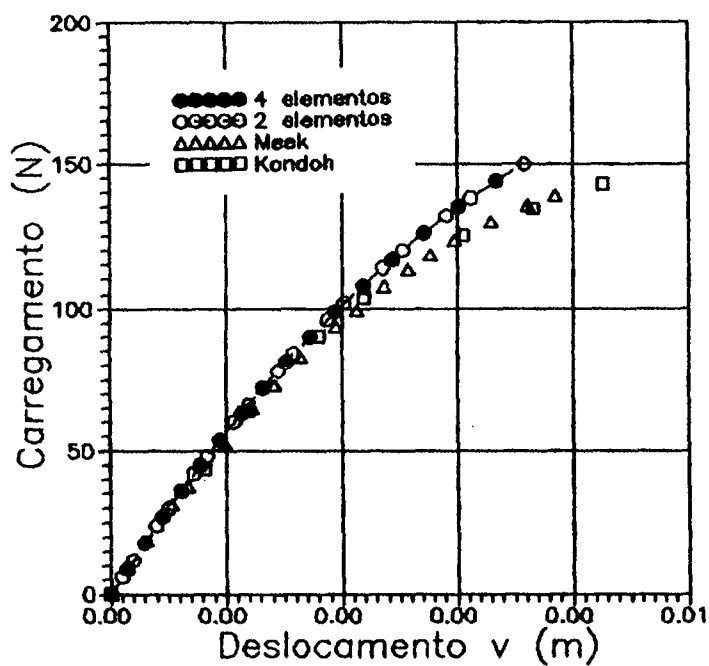


Figura 4.10: Gráfico força-deslocamento de estrutura do tipo junta de Williams.

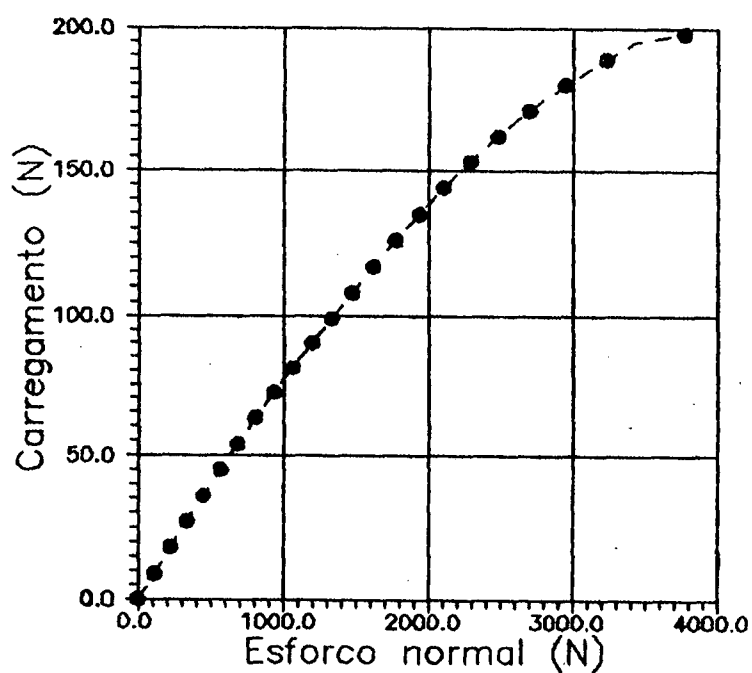


Figura 4.11: Gráfico esforço normal-carregamento da estrutura tipo junta de Williams.

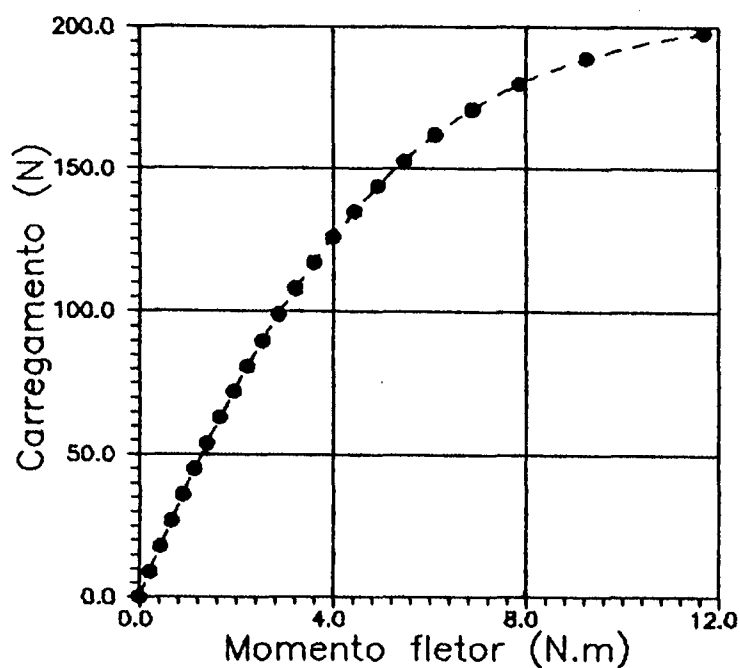


Figura 4.12: Gráfico momento fletor-deslocamento da estrutura tipo junta de Williams.

4.2.4. DOMO HEXAGONAL

O domo hexagonal é uma estrutura composta por 12 elementos de seção transversal quadrada, de lado igual a $1,78 \times 10^{-2}$ m, $E = 3,03 \times 10^9$ N/m², $G = 1,097 \times 10^9$ N/m², $I_1 = 1,378 \times 10^{-8}$, $I_2 = 8,32 \times 10^{-9}$ m⁴, $I_3 = 8,32 \times 10^{-9}$ m⁴ e $A = 3,187 \times 10^{-4}$ m² [11], conforme figura 4.13.

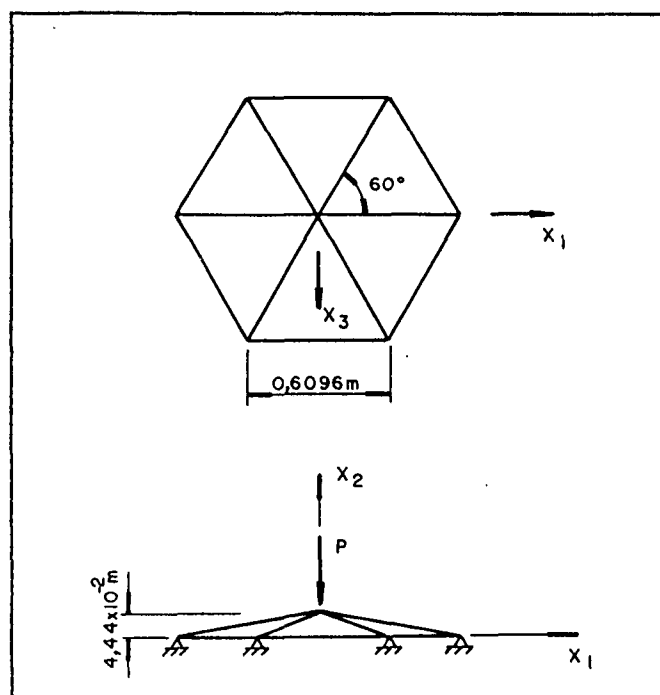


Figura 4.13: Diagrama esquemático do domo hexagonal.

Na análise elástica efetuada neste exemplo, na faixa de pré-flambagem, modelando-se com um elemento cada membro da estrutura, conforme figura 4.14, constata-se que os resultados obtidos concordam consideravelmente com os fornecidos por Meek e Tan [11], quando se restringem os graus de liberdade de translação.

Constata-se, novamente, a necessidade da utilização de um método de solução que permita a análise dos resultados além do ponto limite, tal como o método de Riks. Em virtude da falta deste método, os resultados obtidos na faixa de carregamento de 500 N devem ser analisados e utilizados com precaução.

Tabela 8: Resultados do domo hexagonal.

Incr.	Carregamento (N)	Deslocamento (m)
1	5,00	$0,941654 \times 10^{-4}$
20	100,00	$0,200180 \times 10^{-2}$
40	200,00	$0,432397 \times 10^{-2}$
60	300,00	$0,715483 \times 10^{-2}$
100	500,00	$0,187009 \times 10^{-1}$

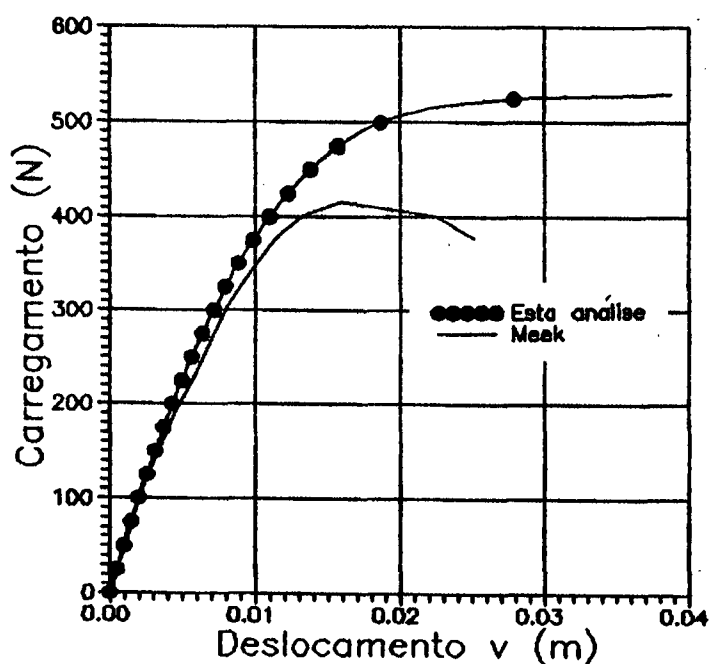


Figura 4.14: Gráfico força-deslocamento para o domo hexagonal.

4.2.5. DOMO

A estrutura analisada neste exemplo é um domo, conforme mostrado na figura 4.15. Aqui, como em [19], cada membro da estrutura é modelado por um único elemento, sendo o sistema de carregamento, para a análise elástica, constituído por uma força vertical aplicada no nó de topo da estrutura. Possui as seguintes características: $E = 2,069 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $G = 8,830 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I_1 = 1,086 \times 10^{-1} \text{ m}^4$, $I_2 = 4,463 \times 10^{-2} \text{ m}^4$, $I_3 = 1,15 \times 10^{-1} \text{ m}^4$, $A = 9,272 \times 10^{-1} \text{ m}^2$.

A curva carregamento-deflexão obtida é bastante diferente da fornecida por Shi [19], contudo nota-se, pela figura 4.16, uma concordância com a solução fornecida por Remseth [23].

No estágio inicial da análise, os resultados obtidos apresentam uma rápida convergência dentro de cada passo. A medida que o processo avançava, percebeu-se que a matriz de rigidez se tornava singular, notando-se a necessidade da utilização do método de Riks, a fim de ultrapassar o ponto limite.

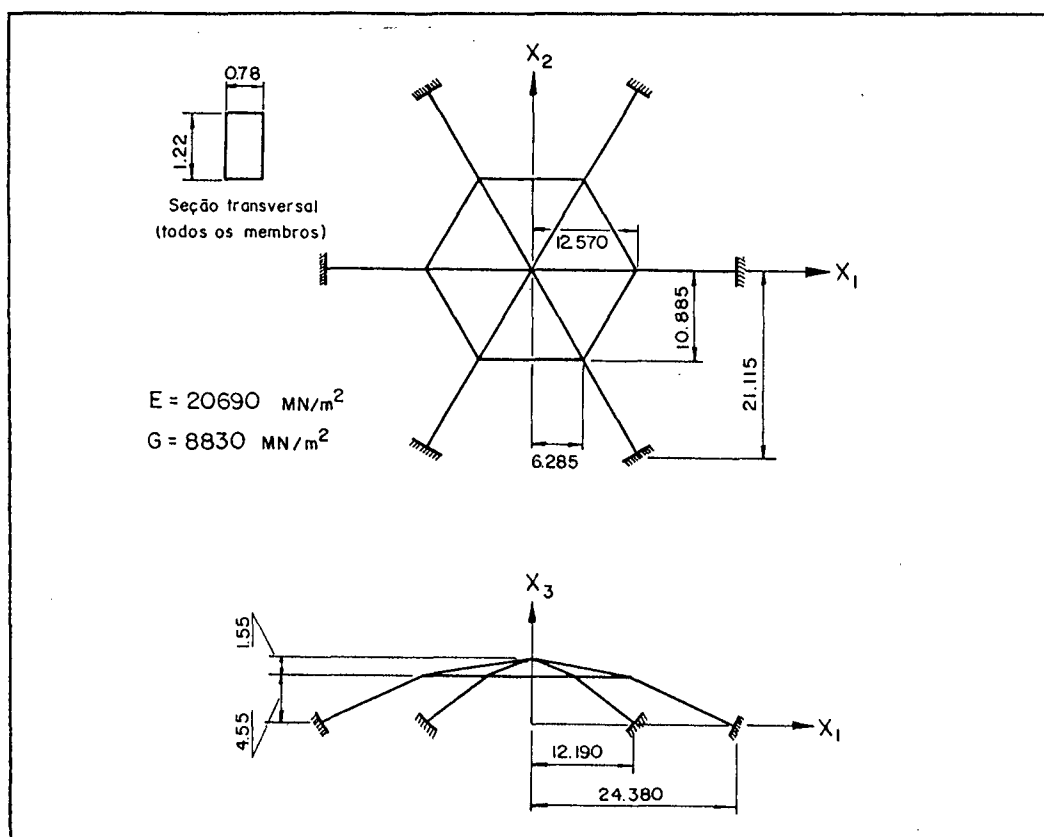


Figura 4.15: Domo.

Tabela 9: Resultados do domo hexagonal.

Carregamento (N)	Deslocamento (m)
$7,4280 \times 10^4$	$6,6742 \times 10^{-4}$
$9,6564 \times 10^5$	$8,7317 \times 10^{-4}$
$9,95352 \times 10^6$	$9,6599 \times 10^{-2}$
$1,26276 \times 10^7$	$1,2552 \times 10^{-1}$
$4,25624 \times 10^7$	$8,5417 \times 10^{-1}$

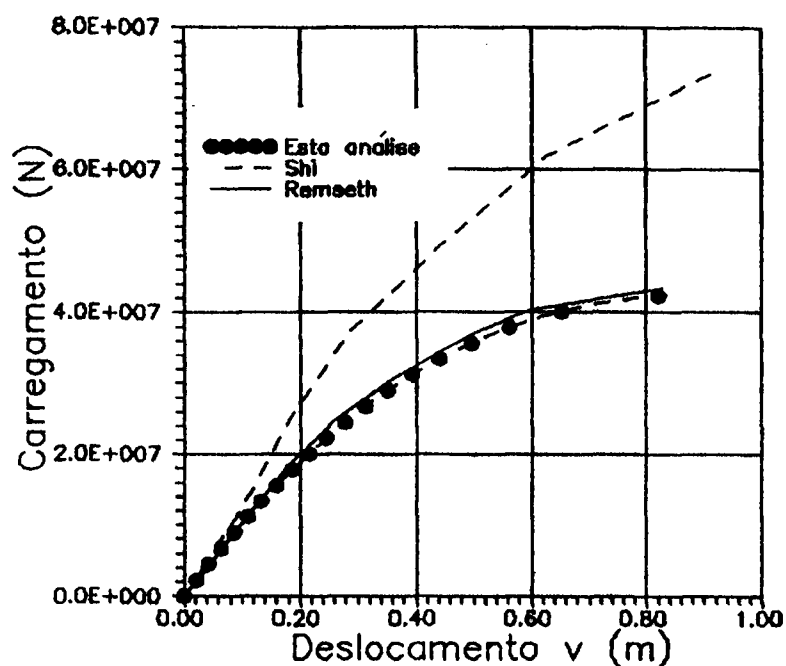


Figura 4.16: Gráfico força-deslocamento para o domo.

4.3. ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA

4.3.1. PÓRTICO PLANO DE DOIS ANDARES

A estrutura estudada neste exemplo de análise elastoplástica é composta por 10 elementos. As colunas têm área $A = 0,0192 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 0,511 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, momento plástico $M_o = 73,2 \times 10^4 \text{ N.m}$ e força normal plástica $N_o = 480 \times 10^4 \text{ N}$. As vigas, por sua vez, possuem área $A = 0,0118 \text{ m}^2$, momento de Inércia $I = 0,292 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, momento plástico $M_o = 42,0 \times 10^4 \text{ N.m}$ e esforço normal plástico $N_o = 295 \times 10^4 \text{ N}$ [20, 29]. Todos os membros do pórtico possuem módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

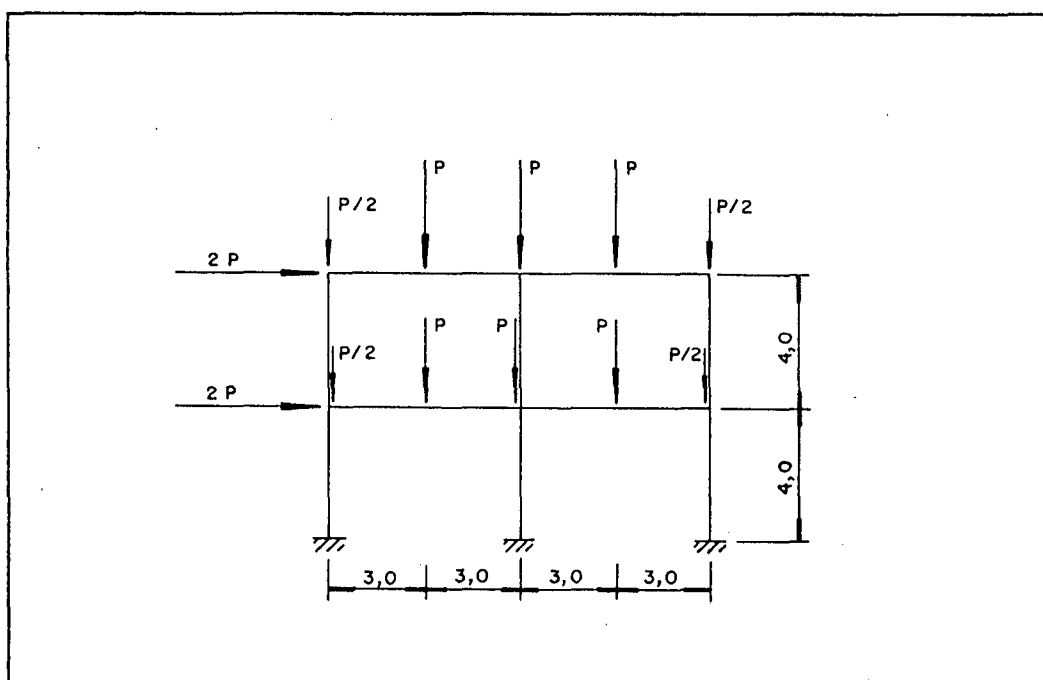


Figura 4.17: Pórtico plano.

Nesta análise, modelaram-se os membros estruturais somente com um elemento, utilizando como função de escoamento

$$\left(\frac{M}{M_o} \right) + \left(\frac{N}{N_o} \right)^2 = 1.$$

Tabela 10: Resultados do pórtico plano.

Rótula	Carregamento (N)	Deslocamento (m)
1 e 2	$1,4400 \times 10^5$	$4,15 \times 10^{-2}$
3	$1,7411 \times 10^5$	$5,22 \times 10^{-2}$
4	$1,8450 \times 10^5$	$5,62 \times 10^{-2}$

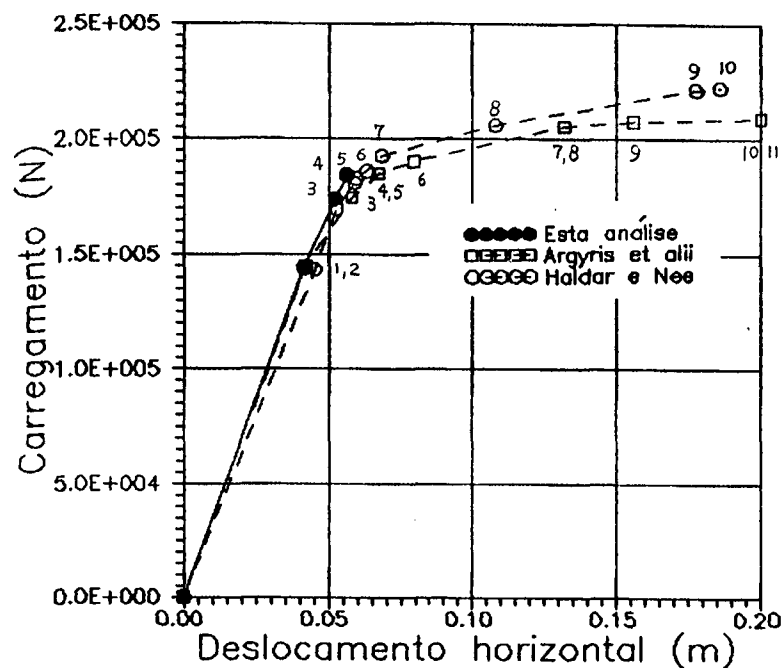


Figura 4.17: Gráfico força-deslocamento para o pórtico plano.

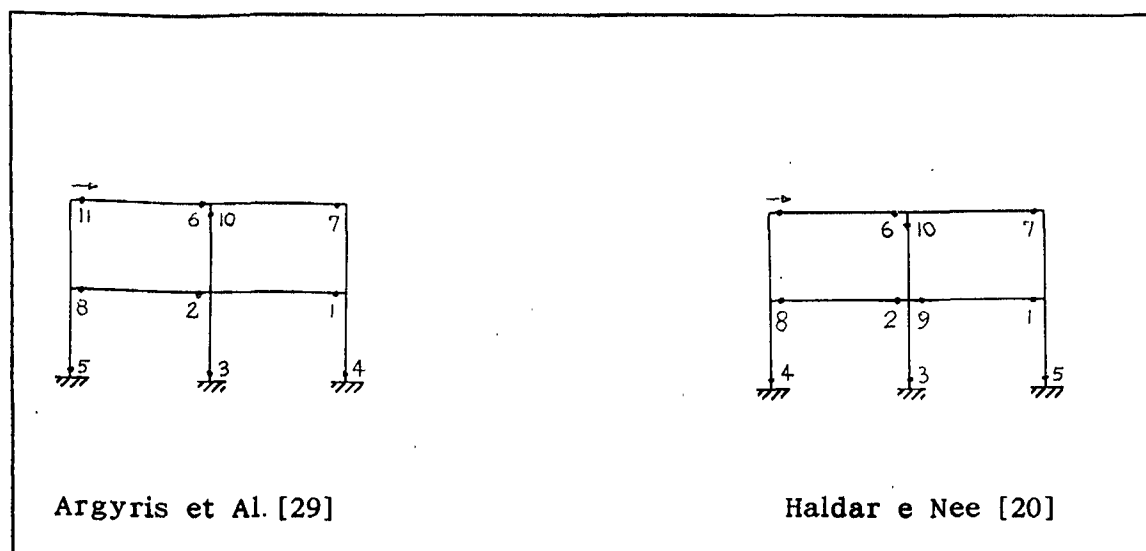


Figura 4.18: Sequência de surgimento das rótulas plásticas.

A curva carregamento-deformação, resultante da análise elastoplástica, apresenta comportamento similar ao das fornecidas por Argyris et al.

[29] e Haldar e Nee [20], sendo que a sequência de formação das rótulas plásticas concorda com a fornecida pelo primeiro. Contudo, não foi possível continuar a análise após a formação da quarta rótula plástica, ficando novamente evidenciada a necessidade de se empregar um procedimento de solução do sistema de equações de elementos finitos mais apurado que o Método de Newton-Raphson Modificado utilizado.

Verificou-se também a necessidade de utilização de um método preditor-corretor de incremento de carregamento [28, 30], a fim de determinar o tamanho do incremento de carga que provoca o surgimento de nova rótula plástica, uma vez que o processo incremental iterativo força uma "redistribuição de tensões", o qual causa o surgimento de rótulas plásticas em níveis de carga não esperados.

4.3.2. PÓRTICO PLANO SIMPLES

Este exemplo de análise elastoplástica é constituído de um pórtico plano simples, cujos membros possuem seção transversal igual a $A = 0,0149 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 2,517 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, módulo de Elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, tensão de escoamento $\sigma_o = 2,4 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, esforço normal plástico $N_o = 3,576 \times 10^6 \text{ N}$ e momento plástico $M_o = 4,483 \times 10^5 \text{ N.m}$ [29].

Nesta análise, modelaram-se os membros estruturais somente com um elemento, utilizando como função de escoamento

$$\left(\frac{M}{M_o} \right) + \left(\frac{N}{N_o} \right)^2 = 1.$$

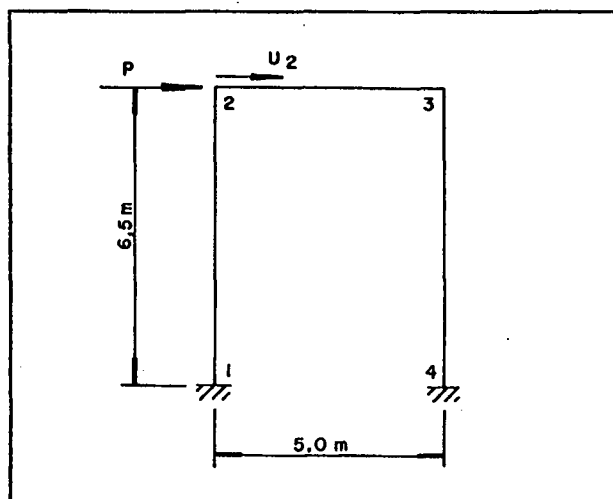


Figura 4.19: Pórtico plano simples.

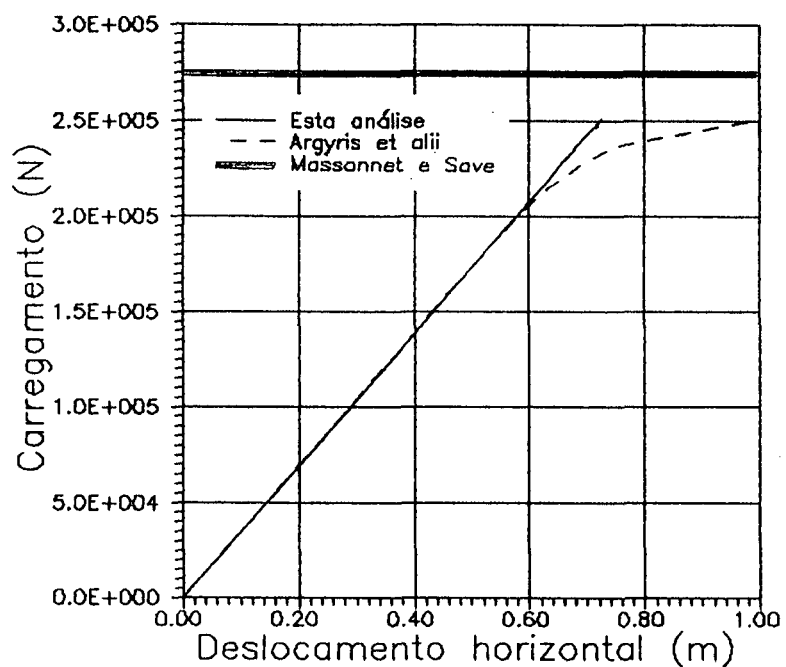


Figura 4.20: Gráfico carregamento-deslocamento do pórtico plano simples.

Tabela 11: Resultados do pórtico plano simples.

Rótula	Carregamento (N)	Deslocamento (m)
1 e 2	$2,4600 \times 10^5$	$7,0887 \times 10^{-2}$
3 e 4	$2,5100 \times 10^5$	$7,2331 \times 10^{-2}$

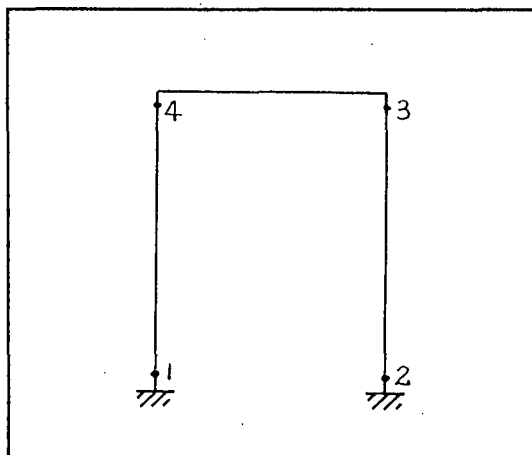


Figura 4.21: Sequência de formação das rótulas plásticas.

Comparou-se o resultado obtido com aquele fornecido por análise limite [37] para material rígido-perfeitamente plástico, constatando-se que o colapso da estrutura ocorreu em um nível de carga inferior ao calculado analiticamente. Considera-se este comportamento adequado, visto que, de acordo com a Teoria de Limite Inferior, a intensidade de uma carga calculada a partir de um sistema em equilíbrio de tensões resultantes que em nenhum lugar viola as condições de escoamento é no máximo igual à intensidade da carga limite [37]. O surgimento das duas primeiras rótulas ocorreu em 246000 N e o colapso total em 251000 N, sendo 275879 N o valor do carregamento limite.

Mais uma vez, ressalta-se a necessidade de empregar um método preditor na análise plástica, método este que permita a determinação do incremento de carga necessário para o surgimento de novas rótulas plásticas, juntamente com um processo que permita a solução do sistema de equações de elementos finitos de forma mais precisa.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DESTE TRABALHO

5.1. CONCLUSÕES

A formulação mista, empregada neste trabalho, mostrou-se capaz de descrever aproximadamente o comportamento de pórticos planos e espaciais em regime elástico e elastoplástico, sendo necessário um estudo mais aprofundado sobre os resultados do item 4.2.5, onde houve divergência entre os resultados deste trabalho e os apresentados por Shi [19].

Como era esperado, o método iterativo de Newton-Raphson modificado mostrou-se adequado para a solução de problemas geometricamente não-lineares, apresentando resultados convergentes até as proximidades do primeiro ponto de singularidade da matriz de rigidez da estrutura, a partir do qual o método não deve mais ser empregado. Esta característica inviabiliza o emprego do citado método quando se deseja investigar o comportamento de uma estrutura no estágio pós-crítico. Para efetuar-se a análise através dos pontos de instabilidade ou bifurcação, que porventura existam no

comportamento das estruturas, aconselha-se o emprego de métodos de controle de incremento, tais como: o Método de Controle por Deslocamento, do Comprimento de Arco [11, 43-45] e do Controle por Trabalho [30].

Durante a análise elastoplástica, percebeu-se que o processo iterativo de cada passo incremental, após o surgimento de rótulas plásticas, levava a uma "redistribuição" de tensões e o conseqüente aparecimento de novas rótulas plásticas em níveis de carregamento em que elas não eram esperadas. Este fato evidenciou a necessidade de se empregar um método preditor-corretor na determinação do incremento de carga necessário ao aparecimento de cada nova rótula plástica, a fim de que o processo de equilíbrio das forças nodais forçasse o aparecimento de nós plásticos em níveis de carregamento compatíveis.

5.2. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DESTE TRABALHO

O presente trabalho mostrou que a elastoplasticidade em estruturas reticulares é um campo bastante vasto para pesquisas futuras, empregando o método de elementos finitos. A fim de dar continuidade a este estudo, sugere-se:

- Implementar um método de controle de incrementos que permita analisar o comportamento estrutural em estágio pós-crítico. Citam-se os Métodos de Controle por Deslocamentos, do Comprimento de Arco [11, 43-45] e do Controle por Trabalho [30]. A diferença entre eles está basicamente no critério utilizado como controle dos incrementos de carga em cada etapa iterativa da análise. Quanto à eficiência deles, a prática tem mostrado que não existe um método ideal para solução de problemas gerais. Os métodos apresentam eficiência em determinados tipos de problemas mas falhas em outros, isto como conseqüência da diversidade e complexidade do comportamento das estruturas e da natureza numérica da análise não-linear.

- Implementar um método preditor-corretor que permita a determinação do carregamento necessário para o surgimento de uma nova rótula plástica, a fim de evitar o processo de "acomodação" das estruturas quando aplicados incrementos de carga inferiores ao do surgimento das rótulas [28, 30].

- Implementar um modelo que permita a aplicação de carregamentos distribuídos conservativos e não-conservativos, possibilitando desta forma a melhor representação dos carregamentos possíveis.

- Implementar um elemento onde não haja restrições quanto ao local da formação das rótulas plásticas, podendo as mesmas formarem-se ao longo dos elementos.

- Na análise plástica, implementar funções de escoamento que considerem o encruamento do material, retratando, de modo mais realista, o comportamento dos deslocamentos plásticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. UEDA, Y. & YAO, T. The plastic node method: a new method of plastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 34: 1089-1104. 1982.
- [2]. BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. s.ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hill Inc. 1982.
- [3]. ARGYRIS, J. H. et al. On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistent v. w. approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 20 :105-131, 1979.
- [4]. ARGYRIS, J. H. et al. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 14 :401-451, 1978.
- [5]. WONG, M. B. e TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. *Computer & Structures*. 34(4): 633-640. 1990.
- [6]. KONDOH, K. & ATLURI, S. N. A simplified finite element method for large deformation, post-buckling analysis of large frame structures, using explicitly derived tangent stiffness matrices. *International Journal for Numerical Method in Engineering*. 23 :69-90, 1986.

- [7]. KONDOH, K. et al. An explicit expression for the tangent-stiffness of a finitely deformed 3-d beam and its uses in the analysis of space frames. *Computers & Structures*. 24 (2):253-271, 1986.
- [8]. CHU e RAMPETSREITER, Large deflection buckling of space frames. *Journal of Structural Division*. 98 (ST12): 2701-2722. 1972.
- [9]. MEEK, J. L. & LOGANATHAN, S. Large displacement analysis of space-frame structures. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*. 72 :57-75, 1989.
- [10]. ____ Geometrically nonlinear behaviour of space frame structures. *Computers & Structures*. 31 (1):35-45, 1989.
- [11]. MEEK, J. L. & TAN, H. S. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 47 :261-282, 1984.
- [12]. AL-BERMANI, F. G. A. e KITIPORNCHAI, S. Nonlinear analysis of thin-walled structures using least element/member. *Journal of Structural Engineering*. 116 (4): 215- 234. 1990.
- [13]. HOFMEISTER, L. D. et al. Large strain, elasto-plastic finite element analysis. *AIAA Journal*. 9 (7):1248-1254, 1971.
- [14]. ZIENKIEWICZ, O. C. et al. Elasto-plastic solution of engineering problems "initial stress", finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1: 75-100. 1969.
- [15]. KONDOH, K. & ATLURI, S. N. Large-deformation, elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffnesses based on assumed stress. *Computational Mechanics*. (2):1-25, 1987.
- [16]. SHI, G. & ATLURI, S. N. Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffnesses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 26:589-615, 1988.

- [17]. SHI, G. & ATLURI, S. N. Active control of nonlinear dynamic response of space-frames using piezo-electric actuators. *Computers & Structures*. 34(4):549-564, 1990.
- [18]. ——— Static and dynamic analysis of space frames with non-linear flexible connections. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 28:2635-2650, 1989.
- [19]. SHI, G. Nonlinear static and dynamic analysis of large-scale lattice-tipe structures and nonlinear active control by piezo actuator. Ph. D. Thesis, Georgia Institute of Technology. 1988.
- [20]. HALDAR, A. & NEE, K. Elasto-plastic deformation analysis of PR steel frames for LRFD. *Computers & Structures*. 31(4): 811-823. 1989.
- [21]. CAROL, I. & MURCIA, J. Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation. I Theory. *Computers & Structures*. 33 (1):79-87, 1989.
- [22]. ——— Nonlinear time-dependent analyses of planar frames using an 'exact' formulation - II. Computer implementation for R. C. structures and examples. *Computers & Structures*. 33 (1):89-102, 1989.
- [23]. REMSETH, S. N. Nonlinear static and dynamic analysis of framed structures. *Computer & Structures*. 10: 879-897, 1979.
- [24]. WONG, M. B. & TIN-LOI, F. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computer & Structures*. 34 (4): 641-646, 1990.
- [25]. WONG, M. B. & TIN-LOI, F., Yield surface linearization in elasto-plastic analysis. *Computer & Structures*. 26 (6): 951-956, 1987.
- [26]. ORBISON, J. G. et al, Yield surface aplications in nonlinear steel frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 33: 557-573, 1982.

- [27]. BRUINETTE, K. E. & FENVES, S. J. A general formulation of elastic-plastic analysis of space frameworks. International Conference on Space Structures, Univ. of Surrey. 1966.
- [28]. MORRIS, A. G. & FENVES, S. J. Aproximate yield surface equations. Journal of the Engineering Mechanics Division. 95(4): 937-954. 1969.
- [29]. ARGYRIS, J. H. et al. Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames - the natural approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 35: 221-248, 1982.
- [30]. MARQUES, S. P. C. Análise não-linear física e geométrica de pórticos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 1990.
- [31]. BRUSH, D. O. & ALMOROTH, B. O. Buckling of bars, plates and shells. s.ed. Tokyo, McGraw-Hill, s.d.
- [32]. BORESI, A. P. & LYNN, P. P. Elasticity in engineering mechanics. 10th ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc. 1974.
- [33]. WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd ed. Oxford. Pergamon Press. 1982.
- [34]. COOK, R. D. Concepts and applications of finite element analysis. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, s.d.
- [35]. DIM, C. L. & SHAMES, I. H. Solid Mechanics, a variational approach. New York. McGraw-Hill. 1973.
- [36]. UEDA, Y. et al. New efficient and accurate method of nonlinear analysis of offshore tubular frames (the idealized structural unit method). Transaction of the ASME. 107: 204-211, 1985.
- [37]. MASSONNET, C. E. & SAVE, M. A. Plastic analysis and design, Vol.I 1^a ed. New York, Blaisdell Publishing Company. 1965.

- [38]. CHEN, W. F. & HAN, D. J. Plasticity for Structural Engineers. New York, Springer-Verlag. 1988.
- [39]. AL-BERMANI, F. G. A. & KITIPORNCHAI, S. Elasto-plastic large deformation analysis of thin-walled structures. Eng. Struc. 12: 28-36, 1990.
- [40]. BOZZO, G. & GAMBAROTTA, L. Inelastic analysis of steel frames for multistory buildings. Computer & Structures. 20 (4): 707-713, 1985.
- [41]. ASHWELL, D. G. Non linear problems, in: Flügge, W., Handbook of Engineering Mechanics. 1st ed. New York. McGraw-Hill. 1962.
- [42]. WEEKS, G. Temporal operators for nonlinear structural dynamics problems. Journal of the Engineering Mechanics Division. 98 (EM5):1087-1104, 1972.
- [43]. CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". Computer & Structures. 13: 55-62. 1981.
- [44]. RIKS, E. A incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids Structures. 15: 529-551.
- [45]. TSAI, C. T. e PALAZZOTTO, A. N. A modified Riks approach to composite shell snapping using a high-order shear deformation theory. Computer & Structures. 35: 221-226. 1990.

BIBLIOGRAFIA AUXILIAR

- [46]. ARGYRIS, J. H. & SYMEONIDIS, Sp. Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading - natural formulation. Part I. Quasistatic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 26 :75-123, 1981.
- [47]. ATLURI, S. N. Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotation, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells - Theory I. *Computers & Structures*. 18 (1):93-116, 1984.
- [48]. BÄCKLUND, J. Large deflection analysis of elasto-plastic beams and frames. *Journal Mechanical Science*. 18: 269-277. 1976.
- [49]. GALLAGHER, R. H. Finite element method for instability analysis, in *Handbook of Finite Elements* (Eds. H. Kardestuncer, F. Brezzi, S. N. Atluri, D. Norrie and W. Pilkey). McGraw-Hill.
- [50]. GHALI, A. & CHIESLAR, J. Hybrid finite element. *Journal of Structural Engineering*. 112 (11):2478-2493. 1986.
- [51]. GRIERSON, S. B et al. Collapse load analysis of skeletal structures, in *Engineering plasticity by mathematical programming* (Eds. M. Z. Cohn, G. Maier, D. E. Grierson) New York. Pergamon Press.

- [52]. HEHL, M. E. Fortran 77: Linguagem de programação estruturada. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1986.
- [53]. HINTON, E. & OWEN, D. R. J. Finite element programming. s. ed. Orlando, Academic Press, inc. s.d.
- [54]. HUEBNER, K. H. The finite element method for engineers. 10th ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [55]. KARAMANLIDIS, D. & JASTI, R. Finite element analysis of two-dimensional shear flexible frame structures: linear analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 67 :161-169, 1988.
- [56]. NOOR, A. K. & PETERS, J. M. Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 17:615-631, 1981.
- [57]. ODEN, J. T. Finite element of nonlinear continua. McGraw-Hill. 1972.
- [58]. OWEN, D. R. J. & HINTON, E. Finite element in plasticity: theory and practice. 2nd ed. Swansea, U.K. ,Pineridge Press limited. 1986.
- [59]. PARS, L. A. A treatise on analytical dynamics. Belfast, Heinemann Educational Books Ltd., 1965.
- [60]. PIAN, T. H. H. & TONG, P. Basis of finite elemente methods for solids continua, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1: 3-28. 1969.
- [61]. SPENCER, A. J. M. Continuum mechanics. 1st ed. London, Longman. 1980.
- [62]. STRANG, G. & FIX, G. J. An analysis of the finite element method. 10th ed. Prentice-Hall, Inc.

- [63]. STRICKLIN, J. A. et al. Geometrically nonlienar structural analysis by direct siffness method. Journal of the Structural Division. 97 (ST9):2299-2314, 1971.

- [64]. TONG, P. & PIAN, T. H. H. A variational principle and the convergence of finite-element method based on assumed stress distribution. International Journal Solids Structures. 5: 463-472. 1969.

- [65]. ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method in engineering science. 2nd ed. McGraw-Hill, 1971.

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Admite-se, para a discretização do problema de estruturas reticulares, funções de interpolação N e \hat{M}_1 que satisfaçam às equações (2.42) e (2.43), respectivamente, e funções de interpolação que satisfaçam a priori à parte linear das equações (2.44) e (2.45), ou seja,

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_2}{\partial x_1^2} - \hat{q}_3 = 0, \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_3}{\partial x_1^2} - \hat{q}_2 = 0. \quad (B.2)$$

Logo, as funções de interpolação tomam a forma

$$N = n + N_p, \quad (B.3)$$

$$\hat{M}_1 = m_1, \quad (B.4)$$

$$\hat{M}_2 = \left(1 - \frac{\hat{X}_1}{\ell}\right) {}^1m_2 + \frac{\hat{X}_1}{\ell} {}^2m_2 + M_{p2} \quad (B.5)$$

e

$$\hat{M}_3 = \left(1 - \frac{\hat{X}_1}{\ell}\right) {}^1m_3 + \frac{\hat{X}_1}{\ell} {}^2m_3 - M_{p3}, \quad (B.6)$$

onde :

$$N_p = (CA)_{1j} N_{pcj} + N_{pn}, \quad j=1, 2, 3, \quad (B.7)$$

$$M_{p2} = (CA)_{3j} M_{pcj} + M_{pn2}, \quad (B.8)$$

$$M_{p3} = (CA)_{2j} M_{pcj} + M_{p3} \quad (B.9)$$

e

$$N_{pcj} = - \int_0^x q_{cj} dx_1 + \frac{1}{\ell} \int_0^x \left[\int_0^x q_{cj} dx_1 \right] dx_1, \quad (B.10)$$

$$N_{pn} = - \int_0^x q_{n1} dx_1 + \frac{1}{\ell} \int_0^x \left[\int_0^x q_{n1} dx_1 \right] dx_1, \quad (B.11)$$

$$M_{pcj} = - \int_0^x \left[\int_0^x q_{cj} dx_1 + \frac{x}{\ell} \int_0^x \left[\int_0^x q_{cj} dx_1 \right] dx_1 \right] dx_1 \quad (B.12)$$

e

$$M_{pni} = - \int_0^x \left[\int_0^x q_{ni} dx_1 + \frac{x}{\ell} \int_0^x \left[\int_0^x q_{ni} dx_1 \right] dx_1 \right] dx_1, \quad (B.13)$$

para $i = 2, 3$, sendo que N_p , M_{p2} e \hat{M}_{p3} satisfazem à forma particular e as funções de interpolação de N e \hat{M}_i são escolhidas de tal forma que satisfaçam à parte homogênea associada das equações (2.42) a (2.45), isto é,

$$\delta N = \nu, \quad (B.14)$$

$$\delta \hat{M}_1 = \mu_1, \quad (B.15)$$

$$\delta \hat{M}_i = \mu_i = {}^1\mu_i \left(1 - \frac{\hat{X}_1}{\ell} \right) + {}^2\mu_i \left(1 - \frac{\hat{X}_1}{\ell} \right), \quad (B.16)$$

para $i = 2, 3$.

MATRIZES DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA

Neste apêndice são descritas as matrizes que entram na formulação do problema elástico de elementos finitos.

Obtém-se os elementos da matriz $[A_{dd}]$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1^2} {}^1N - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1N - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} {}^1Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{13} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^1N - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{21} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1N + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} {}^1Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2^2} {}^1N + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{23} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^1N - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{31} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^1N + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_1} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{32} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^1N + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_2} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{33} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} {}^1N - \left(\frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^1Q_3,$$

$$a_{41} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1^2} {}^1M_1 - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_1} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{42} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1M_1 - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} {}^1M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{43} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^1M_1 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{51} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1M_1 + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} {}^1M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{52} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2^2} {}^1M_1 + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^1M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{53} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^1M_1 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{61} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^1M_1 + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_1} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{62} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^1M_1 + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_2} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{63} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} {}^1M_1 - \left(\frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^1M_3,$$

$$a_{71} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1^2} {}^2N - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{72} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2N - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} {}^2Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{73} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^2N - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{81} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2N + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} {}^2Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{82} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2^2} {}^2N + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2Q_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{83} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^2N - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{91} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^2N + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_1} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{92} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^2N + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_2} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{93} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} {}^2N - \left(\frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^2Q_3,$$

$$a_{101} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1^2} {}^2M_1 - \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{102} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2M_1 \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} {}^2M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{103} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^2M_1 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{111} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2M_1 + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} {}^2M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{112} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2^2} {}^2M_1 + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} {}^2M_2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3 \partial \bar{u}_2} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{113} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^2M_1 - \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{121} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} {}^2M_1 + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_1} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{122} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} {}^2M_1 + \left(\frac{1}{L} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} - \frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_2} \right) {}^2M_3,$$

$$a_{123} = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3} {}^2M_1 - \left(\frac{S}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_3} \right) {}^2M_3.$$

A matriz $\begin{bmatrix} A_{dd} \end{bmatrix}$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & . & . & . & a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & . & . & . & a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & . & . & . & a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & . & . & . & a_{41} & a_{42} & a_{43} & . & . & . \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & . & . & . & a_{51} & a_{52} & a_{53} & . & . & . \\ -a_{61} & -a_{62} & -a_{63} & . & . & . & a_{61} & a_{62} & a_{63} & . & . & . \\ -a_{71} & -a_{72} & -a_{73} & . & . & . & a_{71} & a_{72} & a_{73} & . & . & . \\ -a_{81} & -a_{82} & -a_{83} & . & . & . & a_{81} & a_{82} & a_{83} & . & . & . \\ -a_{91} & -a_{92} & -a_{93} & . & . & . & a_{91} & a_{92} & a_{93} & . & . & . \\ -a_{10\ 1} & -a_{10\ 2} & -a_{10\ 3} & . & . & . & a_{10\ 1} & a_{10\ 2} & a_{10\ 3} & . & . & . \\ -a_{11\ 1} & -a_{11\ 2} & -a_{11\ 3} & . & . & . & a_{11\ 1} & a_{11\ 2} & a_{11\ 3} & . & . & . \\ -a_{12\ 1} & -a_{12\ 2} & -a_{12\ 3} & . & . & . & a_{12\ 1} & a_{12\ 2} & a_{12\ 3} & . & . & . \end{bmatrix}$$

O vetor $\{W\}$ pode ser escrito como:

$$\left\{ W \right\} = \left\{ W_h \right\} + \left\{ W_{pc} \right\} + \left\{ W_{pn} \right\},$$

sendo $\left\{ W_h \right\}$ dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - X_1/\ell)}{EI_2} & \frac{X_1}{\ell EI_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - X_1/\ell)}{EI_3} & \frac{X_1}{\ell EI_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ m_1 \\ {}^1m_2 \\ {}^2m_2 \\ {}^1m_3 \\ {}^2m_3 \end{Bmatrix}$$

$\left\{ W_{pc} \right\}$ é dado por

$$\begin{bmatrix} (CA)_{1j} \left[-q_{cj} x_1 + \frac{q_{cj} \ell}{2} \right] \frac{1}{EA} \\ 0 \\ (CA)_{3j} \left[-\frac{q_{cj} x_1^2}{2} + \frac{q_{cj} \ell x_1}{2} \right] \frac{1}{EI_2} \\ (CA)_{2j} \left[-\frac{q_{cj} x_1^2}{2} + \frac{q_{cj} \ell x_1}{2} \right] \frac{1}{EI_3} \end{bmatrix}$$

$\left\{ W_{pn} \right\}$ é dado por

$$\begin{bmatrix} \left(-q_{n1} x_1 + \frac{q_{n1} \ell}{2} \right) \frac{1}{EA} \\ 0 \\ \left(-q_{n2} x_1 + \frac{q_{n2} \ell}{2} \right) \frac{1}{EI_2} \\ \left(-q_{n3} x_1 + \frac{q_{n3} \ell}{2} \right) \frac{1}{EI_3} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

O incremento no vetor $\{ W \}$ em relação aos esforços internos é dado por

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_1} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_3} \\
 \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_1} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_1^2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_1 \partial M_2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_1 \partial M_3} \\
 \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_1 \partial M_2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_2^2} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_2 \partial M_3} \\
 \frac{\partial^2 W_c}{\partial N \partial M_3} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_1 \partial M_3} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_2 \partial M_3} & \frac{\partial^2 W_c}{\partial M_3^2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \Delta N \\
 \Delta M_1 \\
 \Delta M_2 \\
 \Delta M_3
 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \Delta W \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \\ \Delta M_3 \end{Bmatrix}.$$

Lembrando que as forças internas generalizadas são funções do campo de forças e do campo de deslocamentos, o incremento das forças generalizadas tem a forma

$$\begin{Bmatrix} \Delta N & \Delta M_1 & \Delta M_2 & \Delta M_3 \end{Bmatrix}^T = [F] \begin{Bmatrix} \Delta \sigma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta q_q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta q_\theta \end{Bmatrix},$$

onde

$[F]$ é a matriz das funções de interpolação e

$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma \end{Bmatrix}$ é o incremento do vetor $\begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}$.

O vetor $\begin{Bmatrix} \Delta q_q \end{Bmatrix}$ é definido como

$$\begin{bmatrix} \Delta N_{pci} (CA)_{1i} + \Delta N_{pn} \\ 0 \\ \Delta N_{pci} (CA)_{1i} + \Delta N_{pn} \\ \Delta N_{pci} (CA)_{1i} + \Delta N_{pn} \end{bmatrix}, \text{ para } i=1,2,3.$$

Desenvolvendo $\left\{ \Delta q_q \right\}$, tem-se:

$$\left\{ \Delta q_q \right\} = \begin{bmatrix} -q_{ci} (CA)_{1i} \\ 0 \\ \left(-q_{ci} x_1 + \frac{q_{ci} \ell}{2} \right) (CA)_{3i} \\ \left(-q_{ci} x_1 + \frac{q_{ci} \ell}{2} \right) (CA)_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_n \\ 0 \\ -q_{n2} x_1 + \frac{q_{n2} \ell}{2} \\ -q_{n2} x_1 + \frac{q_{n2} \ell}{2} \end{bmatrix}.$$

A determinação de $\left\{ \Delta q_{q\theta} \right\}$ envolve variações no campo dos deslocamentos. O vetor tem a forma $\left\{ \Delta q_{q\theta} \right\} = [B] \left\{ \Delta d \right\}$, sendo os elementos de $[B]$ especificados abaixo.

$$b_{11} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1^2} N_{pc1} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} N_{pc2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} N_{pc3} \right),$$

$$b_{12} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} N_{pc1} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2^2} N_{pc2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} N_{pc3} \right),$$

$$b_{13} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_3} N_{pc1} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_2 \partial \bar{u}_3} N_{pc2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}_3^2} N_{pc3} \right),$$

$$b_{31} = \left(- \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} M_{pc1} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} M_{pc2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} \left(\frac{S}{L} \right) M_{pc3} \right),$$

$$b_{32} = \left(- \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} M_{pc1} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} M_{pc2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} \left(\frac{S}{L} \right) M_{pc3} \right),$$

$$b_{33} = \left(- \frac{\partial}{\partial \bar{u}_3} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_1} M_{pc1} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}_3} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}_3} \frac{\partial S}{\partial \bar{u}_2} M_{pc2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_3} \left(\frac{S}{L} \right) M_{pc3} \right),$$

$$b_{41} = \left(- \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} M_{pc1} + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1^2} M_{pc2} \right),$$

$$b_{42} = \left(- \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_2^2} M_{pc1} + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{u}_1 \partial \bar{u}_2} M_{pc2} \right),$$

$$b_{43} = 0.$$

$$\begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & . & . & . & b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & . & . & . & b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . & . \\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} & . & . & . & b_{41} & b_{42} & b_{43} & . & . & . \end{bmatrix}$$

Como visto anteriormente, a matriz constitutiva $[C]$ é obtida a partir da Função Densidade de Energia Complementar W_c , tendo a forma abaixo especificada:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GI_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_3} \end{bmatrix}.$$

MATRIZES DA FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA

Neste apêndice são descritas as matrizes que entram na formulação do problema elastoplástico de elementos finitos.

O vetor abaixo representa as derivadas da função de escoamento em relação às forças generalizadas:

$$\left\{ G \right\} = \left(\frac{\partial \ell}{\partial N}, \frac{\partial \ell}{\partial M_1}, \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \left(1 - \frac{\ell_p}{\ell} \right), \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \left(\frac{\ell_p}{\ell} \right), \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \left(1 - \frac{\ell_p}{\ell} \right), \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \left(\frac{\ell_p}{\ell} \right) \right),$$

As matrizes e vetores abaixo são utilizados na parte elastoplástica do problema e foram obtidos a partir das matrizes e vetores da parte elástica.

$$\left\{ \hat{\Delta R}_\sigma \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\Delta R_\sigma \right] \\ \left(\frac{\partial \ell}{\partial N}, N + \frac{\partial \ell}{\partial M_1} \hat{\Delta M}_1 + \frac{\partial \ell}{\partial M_2} \hat{\Delta M}_2 + \frac{\partial \ell}{\partial M_3} \hat{\Delta M}_3 \right) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \hat{R}_\sigma \right\} = \left\{ \left\{ R_\sigma \right\} + \begin{Bmatrix} H_p \\ \theta_{p1} \\ \theta_{p2} (1 - \ell_p/\ell) \\ \theta_{p2} (\ell_p/\ell) \\ \theta_{p3} (1 - \ell_p/\ell) \\ \theta_{p3} (\ell_p/\ell) \\ \left\{ 0 \right\} \end{Bmatrix} \right\}$$

$$\left[A_{\sigma d} \right] = \begin{bmatrix} \left[A_{\sigma d} \right] \\ \left[0 \right] \end{bmatrix}$$

$$\left[A_{\sigma do} \right] = \begin{bmatrix} \left[A_{\sigma do} \right] \\ \left[0 \right] \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \hat{\Delta\sigma} \right\}^T = \left\{ \left\{ \Delta\sigma \right\}^T \left\{ \Delta\lambda \right\} \right\}$$

$$\left[\hat{A}_{\sigma\sigma} \right] = \begin{bmatrix} \left[A_{\sigma\sigma} \right] \left\{ G \right\} \\ \left\{ G^T \right\} \left\{ 0 \right\} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ C \right\}^T = \left(\left\{ G \right\}^T \left[A_{\sigma\sigma} \right]^{-1} \left\{ G \right\} \right)^{-1} \left\{ G \right\}^T \left[A_{\sigma\sigma} \right]^{-1}$$